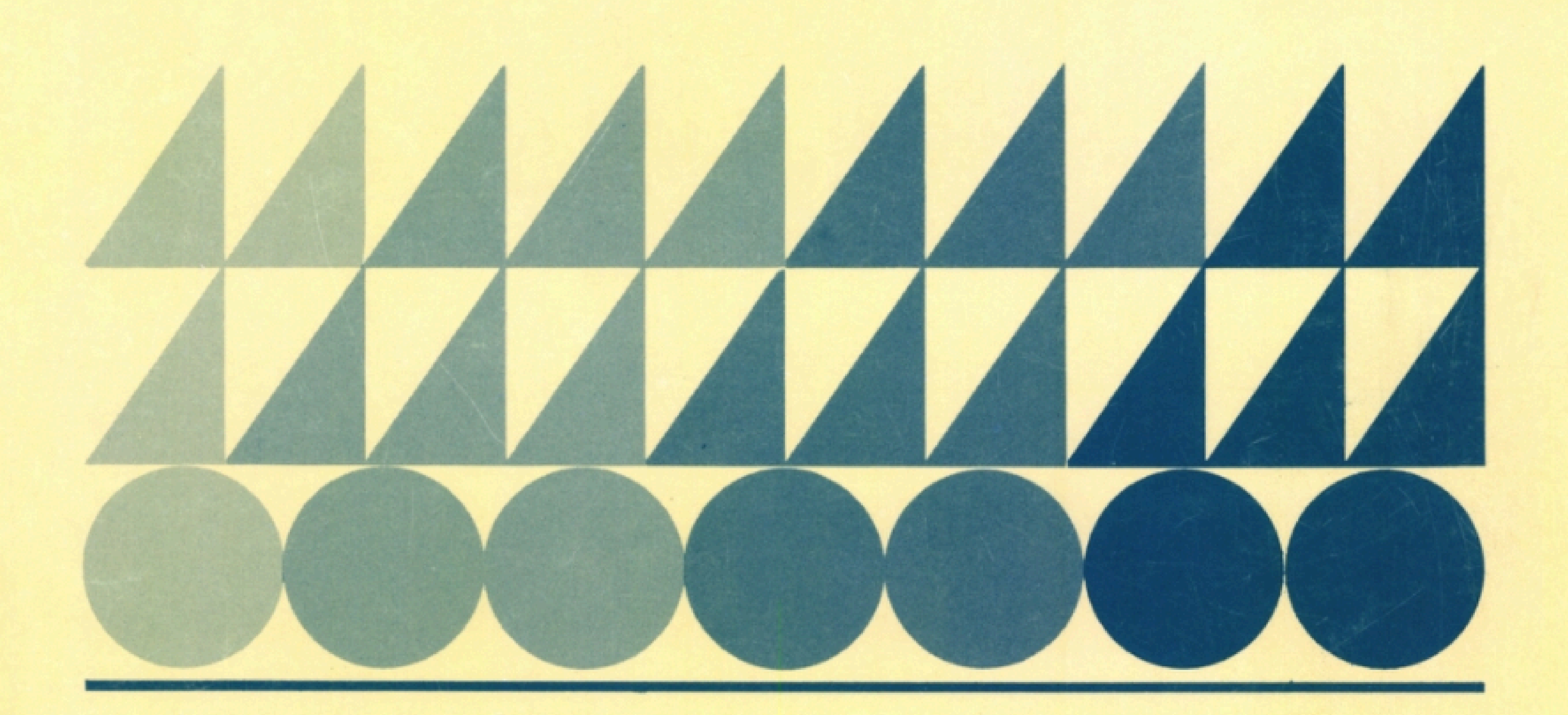
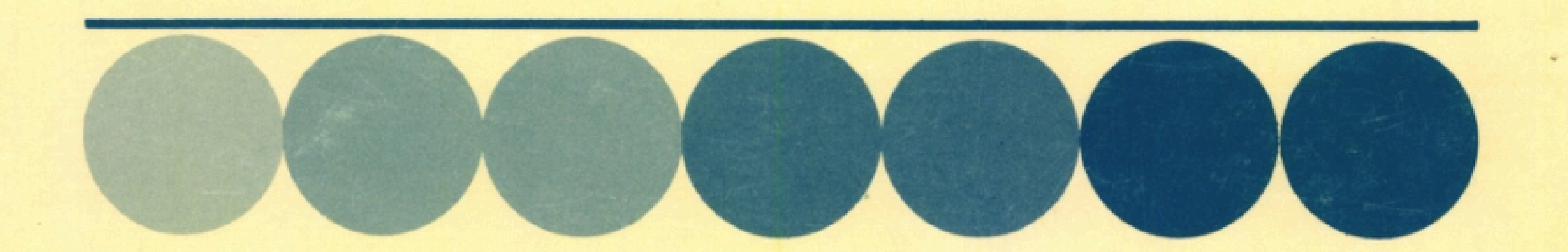
الدكتور محمد عبد المنعم إسماعيل



مقدمة في

التبولوجيا



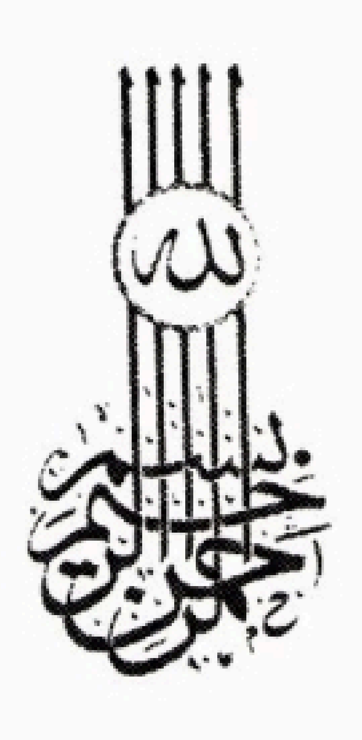
١٤٠٢ هـ



الناشر : عمادة شؤون المكتبات – جامعة الملك سعود

الرياض

١٩٨٢ م



مقدمة في التبولوجيا

الدكتور محمد عبد المنعم إسماعيل
أستاذ مساعد في الرياضيات
كلية العلوم - جامعة الملك سعود

الناشر عمادة شئون المكتبات – جامعة الملك سعود
ص.ب. ٢٤٥٤ الرياض — المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى ١٤٠٢ هـ (١٩٨٢ م)

طباعة شركة مطابع المطوع - الدمام
المملكة العربية السعودية

المحتويات

قائمة الأشكال

المقـــدمة

يقـدم هذا الكتاب الموضوعات التي تدرس عادة في مقرر أول في التبولوجيا لطلاب الرياضيات في المستوى الجامعي. وقد كان الباعث على تأليفه ندرة الكتب باللغة العربية في هذا الفرع الرئيسي من الرياضيات، والذي يعتبر متطلبا للتخصص في عدد كبير من فروعها، نذكر منها على سبيل المثال: التحليل الرياضي، والتحليل الدالي، والهندسة التفاضلية، والأنظمة الديناميكية.

وأود أن أشير إلى أنني، في خلال عرضي للمفاهيم المختلفة، قد أوليت اهتماما خاصا لنقطتين:

أولا: ايراد الأفكار الهندسية الحدسية التي كانت مصدرا للتجريد الرياضي.

ثانياً: اعطاء التطبيقات التي تتعلق بالموضوع.

وفي اعتقادي أن هذا النهج يؤدي إلى فهم أعمق، ورؤية أوضح لدى الطلاب.

وفيما يلي استعراض موجز لمحتويات فصول الكتاب. يهدف الفصلان الأول والثاني لتقديم التعاريف الأساسية مثل الفضاء المتري والفضاء التبولوجي والتكافؤ التبولوجي. ولقد رأيت تقديم الفضاء المتري أولا لأنه المفهوم الأسهل، والذي من شأنه أن يهيىء الطالب لتعريف الفضاء التبولوجي. في الفصل الثالث، نبحث كيفية استحداث فضاءات جديدة، وكتطبيق لذلك ننشىء منحنى يملأ المربع (منحنى بينو).

وتتناول الفصول الثلاث التالية خاصتين تبولوجيتين هما الاتصال والتراص، وأهم النتائج التي نحصل عليها في هذا الصدد نظرية تيخونوف، ونظرية بير. أما في الفصل السابع فنتعرض لمسلمات الفصل والعد، ومن هنالك نمضي لبرهان نظريات شهيرة في التبولوجيا - في الفصل الثامن - وهي: تمهيد يوريسون، ونظرية التمديد لتيتز، ونظرية التعبير المتري ليوريسون.

والفصل الأخير من الكتاب يتعلق بتعريف الزمرة الأساسية، وحساب الزمرة الأساسية للكرة S^n، فهو يمثل مدخلا للتبولوجيا الجبرية. ومن الدوافع التي حدت بي لادراج هذا الفصل، التأكيد على وحدة الرياضيات، والتفاعل القوي بين فروعها، فتقديم الرياضيات البحتة كمقررات منفصلة في التحليل والهندسة والجبر قد يعطي الطالب انطباعا زائفا باستقلال هذه الفروع عن بعضها البعض.

لقد أتيح لي تدريس معظم موضوعات هذا الكتاب بجامعة الخرطوم وجامعة الملك سعود، ودراسته لا تتطلب إلاَّ إلماماً بمبادىء نظرية المجموعات ومبادىء التحليل الحقيقي.

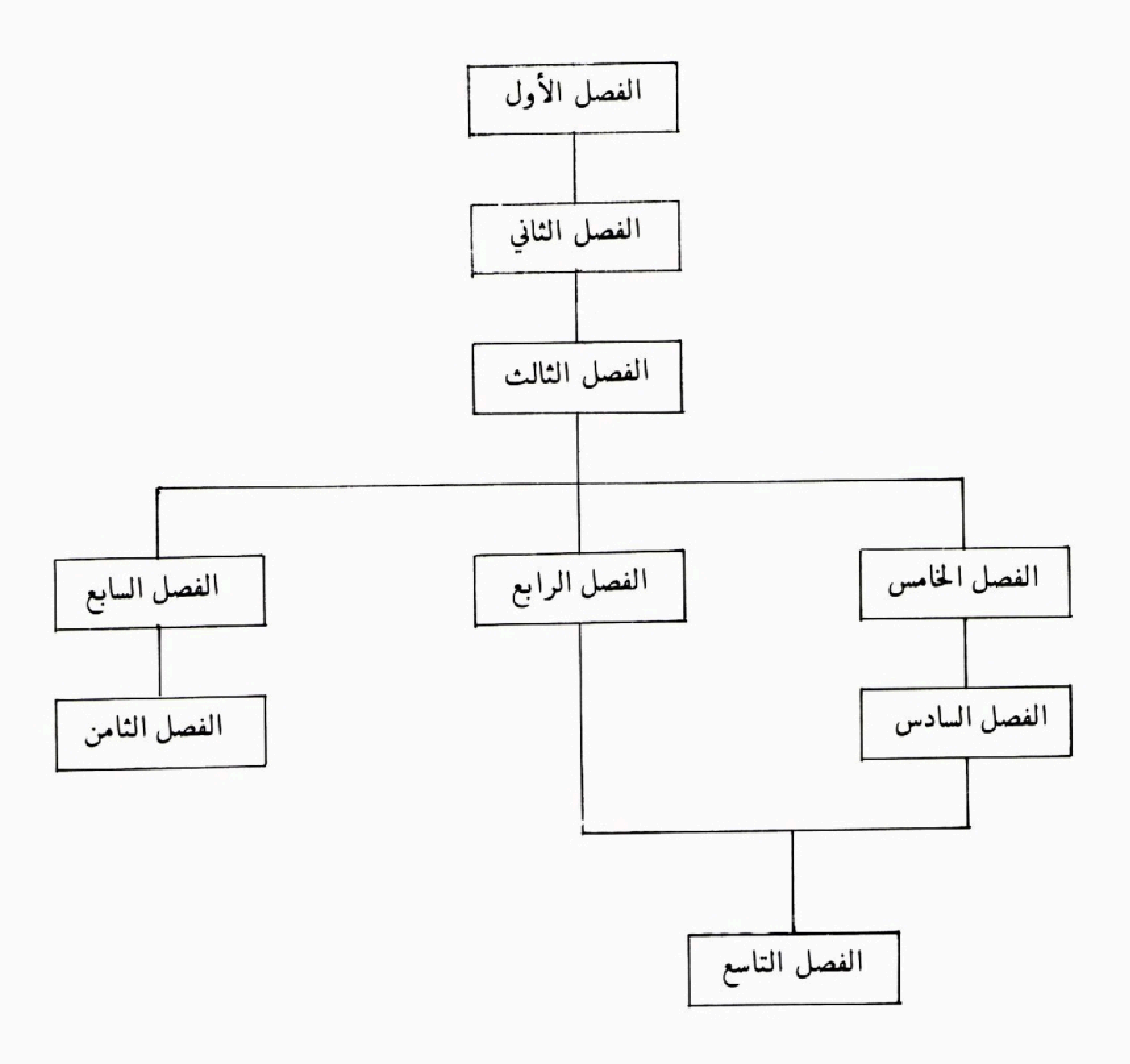
أود أن أتقدم بالشكر الجزيل والتقدير للدكتور خضر الأحمد فهو الذي اقترح عليّ تأليف هذا الكتاب، وكان عونا كبيرا لي في الوصول إلى المصطلحات العربية. والشكر الجزيل والتقدير للدكتور كمال الهادي، لمراجعته للكتاب وتقديم العديد من المقترحات القيمة لتحسين عرضه.

محمد عبد المنعم اسماعيل

المصطلحات الانجليزية.

عند تعريفنا لأي مصطلح رياضي، يجد الطالب في أسفل الصفحة ما يقابله باللغة الانجليزية.

مخطط يوضح تبعية فصول الكتاب



المدخل

« إن أية مسألة ذات طبيعة غير خطية، أو تتعلق بأكثر من نظام احداثي واحد، أو بأكثر من متغير واحد، أو حيثما كان الكيان معرفا في البداية بطريقة شمولية، فمن المرجح أن تتطلب اعتبارات من التبولوجيا، ونظرية الزمر لحلها ».

مورس[١]، ١٩٣٤ م

نبذة تاريخية

تعد التبولوجيا من فروع الرياضيات الحديثة، مقارنة بالهندسة الاقليدية أو حساب التفاضل والتكامل. وترجع جذورها الى حوالي منتصف القرن التاسع عشر، حين قدم موبيس[٢] بحثا رائدا حول تبولوجيا السطوح. والى ريمان[٣] ينسب الفضل في لفت الأنظار لأهمية الأفكار التبولوجية، وذلك من خلال تصنيفه للسطوح القابلة للتوجيه، واكتشافه للعلاقة بين بعض الخواص الهامة للدوال المركبة وهندسة السطوح. ولا شك أن بوانكاريه[٤] هو أعظم المبتدعين في مجال التبولوجيا، ففي أواخر القرن الماضي وأوائل القرن الحاضر، أسس بوانكاريه التبولوجيا التركيبية، وأرسى كثيراً من دعائم التبولوجيا الجبرية.

وبصدور كتاب هاوسدورف[٥] عام ١٩١٤ م، احتلت التبولوجيا مكانا لائقا كفرع مستقل هام من الرياضيات. ومن بعد ذلك تطورت كثيرا وانقسمت إلى فروعها الثلاثة الرئيسية: التبولوجيا العامة، والجبرية، والتفاضلية.

---

(١) Morse

(٢) Mobius

(٣) Riemann

(٤) Poincare

(٥) Housdorff

ما هي التبولوجيا؟

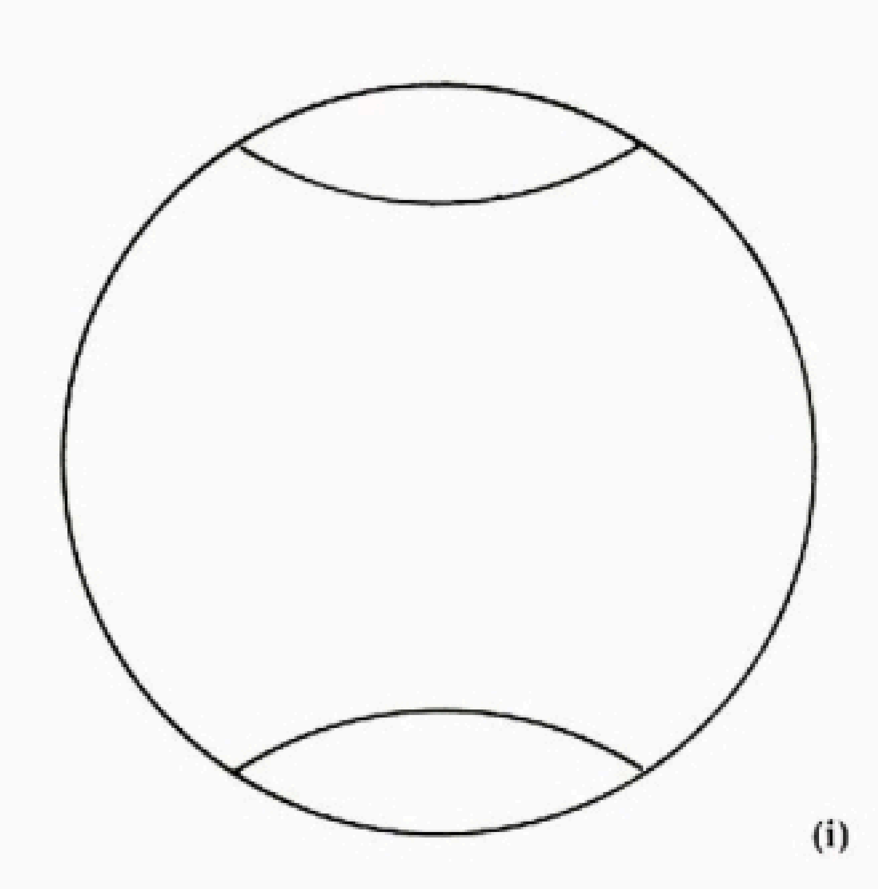
التبولوجيا ضرب من الهندسة يتعلق بدراسة الفضاءات التبولوجية والرواسم المستمرة. والفضاء التبولوجي تجريد رياضي لمفهوم الشكل الهندسي، ويشتمل على مجموعة من النقاط مزودة بكيان يعبر عن مفهوم «القرب»، مما يتيح ادخال مفهوم الاستمرار. فالراسم المستمر f، عند النقطة a من الوجهة الحدسية، هو الذي يستوفي الشرط: كلما «اقتربت» النقطة x من a، «اقتربت» f(x) من f(a). فإذا كان لدينا فضاءان تبولوجيان، فهما متكافئان تبولوجيا إذا وجد تقابل مستمر بينهما، له معكوس مستمر.

وقد أطلق على التبولوجيا اسم «هندسة الشرائح المطاطية»، لأن المشتغل بالتبولوجيا يتخيل الشكل الهندسي مصنوعا من المطاط، والخواص التي تهمه لا تتأثر باجراء تمديد أو تقليص للشكل، طالما أنه لا يؤدي إلى تمزيقه.

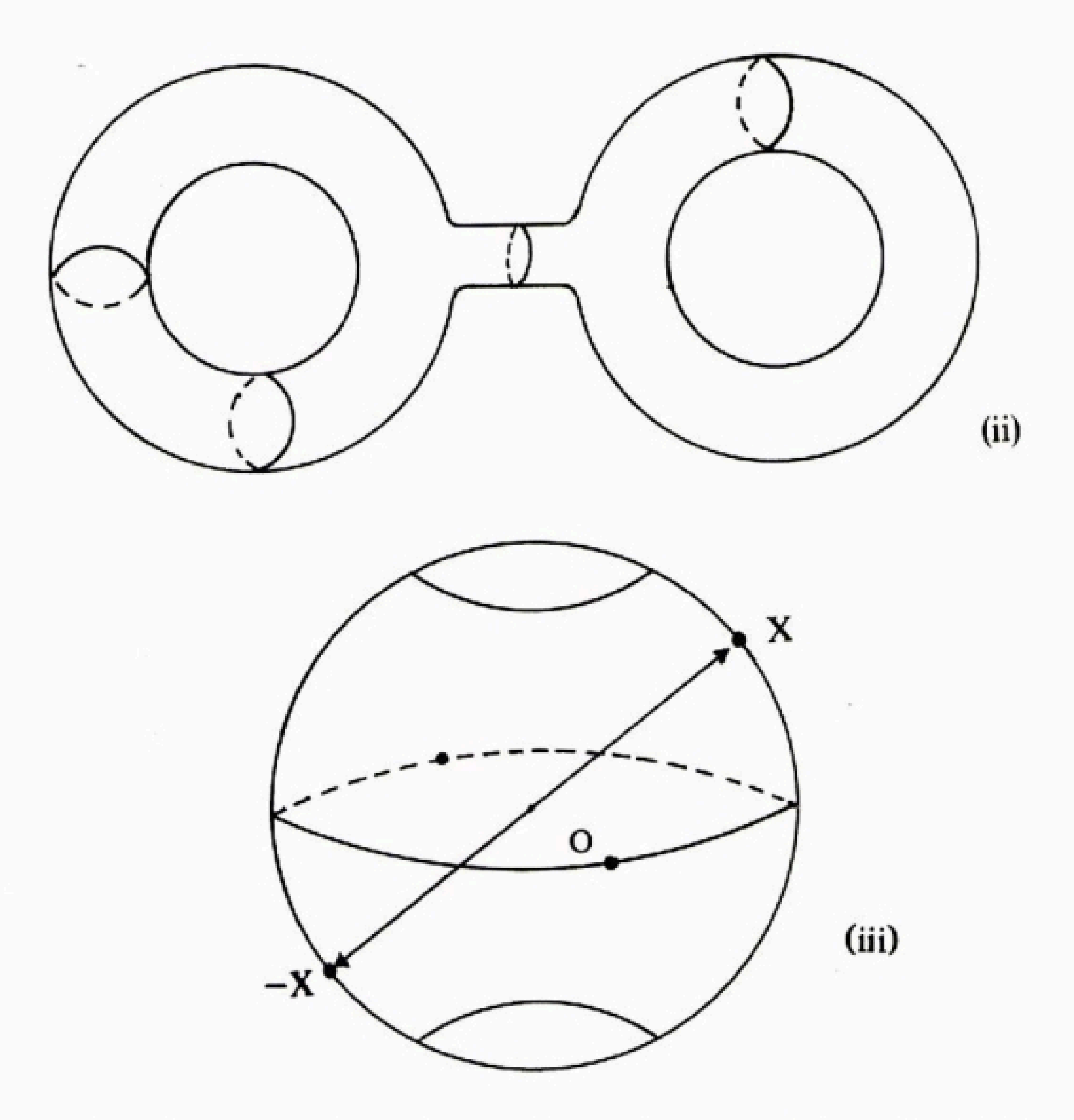
ولنأخذ بعض الأمثلة على المسائل التي شغلت التبولوجيين:

(١) مسألة التصنيف

وتتعلق بإمكانية ابتداع طريقة عامة لانشاء الفضاءات التبولوجية في عدد منته من الخطوات، وتصنيفها حسب التكافؤ التبولوجي. ومن بين الحلول الجزئية لهذه المسألة، مثلا، فقد اكتشف أن كل سطح (متصل ومتراص) مكافىء لواحد فقط مما يأتي (i) للكرة S^2 أو (ii) لمجموع متصل من الطارات، أو (iii) لمجموع متصل من المستويات الاسقاطية.



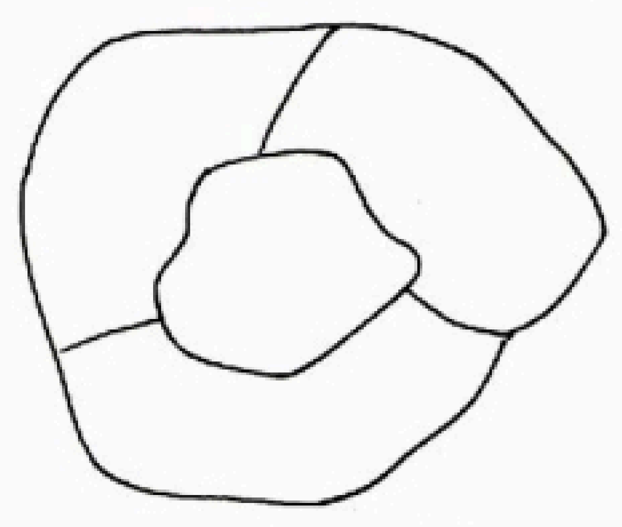
(i)



الشكل (١): (i) الكرة s^2 (ii) المجموع المتصل لطارتين (iii) المستوى الاسقاطي

(٢) مسألة الأربعة ألوان

وتطرح التساؤل التالي: هل بالامكان تلوين كل خريطة من الأقطار ترسم على الكرة بأربعة ألوان فقط بحيث لا يلون قطران لهما حدود مشتركة بنفس اللون؟. لنلاحظ أن الشكل المضبوط لأي قطر لا يهم، فيما يتعلق بهذه المسألة، فأي شكل مكافىء له، يقوم مقامه، طالما كانت حدوده المشتركة تقع مع نفس الاقطار (الالتقاء في نقطة واحدة لا يعد حدا مشتركا).



الشكل (٢): ثلاثة ألوان لا تكفي

وجدير بالذكر أن هذه المسألة قد طرحت في عام ١٨٥٣ م، وأمكن حلها فقط في عام ١٩٧٦م([1] و [2]) عندما ثبت أن أربعة ألوان تكفي لتلوين أية خريطة على الكرة أو المستوى الاقليدي (الشكل (٢) يبين أن ثلاثة ألوان لا تكفي).

(٣) مسألة النقطة الثابتة

وتتعلق بما يأتي: إذا كان $f:X \longrightarrow X$ راسماً مستمراً، فهل هنالك نقطة x في X بحيث أن $f(x)=x$ وأهمية هذه المسألة لا تقتصر على التبولوجيا وحدها، وإنما تشمل فروعاً أخرى من الرياضيات، مثل نظرية المعادلات التفاضلية.

أهمية التبولوجيا

لقد كان للتبولوجيا تأثير هائل بشأن تطوير الرياضيات وفتح آفاق جديدة للبحث في شتى فروعها. فأدوات التبولوجيا ونتائجها تلعب دوراً بالغ الأهمية في التحليل الرياضي. ونظرية المعادلات التفاضلية الحديثة تقوم على دراسة المعادلة التفاضلية كحقل اتجاهي معرف على نوع خاص من الفضاءات التبولوجية، وهي الفضاءات التي لها محليا نفس خواص الفضاء الاقليدي R^n. وقد مهدت التبولوجيا لظهور فروع جديدة في الجبر مثل الجبر الهمولوجي ونظرية K الجبرية.

وبجانب كل ما تقدم، فالتبولوجيا تزخر بنظريات وأساليب على مستوى سامق من الإبداع الرياضي، وفروعها تجتذب اهتمام العديد من كبار الباحثين الرياضيين المعاصرين.

المتطلبات والدلالات

Prerequisites and Notations

مجموعات الأعداد

في هذا الصدد، نفترض الالمام بالخواص المعتادة للأعداد الحقيقية والمركبة، وبصفة خاصة، أن لكل مجموعة X محدودة وغير خالية من الأعداد الحقيقية، حدا علوياً أصغر، حعا X[1]، وحدا سفلياً أكبر، حسا X[2].

وسوف نستخدم الرموز المعتادة لمجموعات الأعداد التالية:

C لمجموعة الأعداد المركبة.

R لمجموعة الأعداد الحقيقية.

R_+ لمجموعة الأعداد غير السالبة.

Q لمجموعة الأعداد القياسية.

Z لمجموعة الأعداد الصحيحة.

N لمجموعة الأعداد الطبيعية.

I للفترة المغلقة [0, 1]

المجموعات

نستخدم الرمز $X = \{x: x \in P\}$ للمجموعة X المشكلة من كل العناصر x التي تتمتع بالخاصة P. $x \in X$ ترمز لـ (x ينتمي إلى X)، و $x \notin X$ ترمز لـ (x لا ينتمي إلى المجموعة X) و $\forall$ ترمز لـ (لكل). $A \subset X$ أو $X \supset A$ تعني أن المجموعة A محتواة في X. إذا كانت A محتواة في X، فنرمز لمتممتها بـ A^c وهي المجموعة

$$\{x: x \in X \text{ و } x \notin A\}$$

---

(١) Sup X (٢) inf X

نفترض تعريف العائلة (المجموعة) المرقمة. إذا كانت X_j مجموعة لكل j في عائلة مرقمة J، فاتحادها هو المجموعة:

$$\bigcup_J X_j = \{ x : x \ni X_j ، \text{لعنصر ما } j \ni J \}$$

وتقاطعها هو المجموعة:

$$\bigcap_J X_j = \{ x : x \ni X_j , \forall j \ni J \}$$

المجموعتان X و Y تتقاطعان إذا كان $Y \cap X \neq \phi$

إذا كانت لدينا مجموعات $X_1 , \ldots , X_n , n \ni N$، فجداؤها الديكارتي $\overset{n}{\pi} X_i$ أو $X_1 \times \ldots \times X_n$ هو المجموعة $\{ x_i : x = (x_1,\ldots,x_n) \ni X_i , 1 \le i \le n \}$ إذا كانت $(x_1 , \ldots x_n) = x \ni \overset{n}{\pi} X_i$ فتسمى $x_1 , \ldots , x_n$ احداثيات x إذا كانت $X = X_1 = \ldots = X_n$ فيرمز للجداء الديكارتي $\overset{n}{\pi} X_i$ بالرمز X^n.

حين نعتبر R^n، بصفة خاصة، فبعض مجموعاته الجزئية ترد كثيرا، ولذا فنستخدم لها الأسماء والرموز التالية:

قرص الوحدة المغلق $D^n = \{ x \ni R^n : \sum^n x_i^2 \le 1 \}$.

قرص الوحدة المفتوح $U^n = \{ x \ni R^n : \sum^n x_i^2 < 1 \}$.

الكرة $S^{n-1} = \{ x \ni R^n : \sum^n x_i^2 = 1 \}$.

نفترض الالمام بنظرية ديمورقن، والمبادىء الأولية لنظرية المجموعات.

تنص مسلمة الاختيار على ما يلي: إذا كانت $\{ X_j : j \ni J \}$ مجموعة من المجموعات بحيث أن X_{j_1} لا تقاطع X_{j_2} كلما كانت $j_2 \neq j_1$، فحينئذ توجد مجموعة X بحيث أن $X \cap X_j$ تحوي عنصراً واحدا فقط، $\forall j \ni J$.

الرواسم

لتكن X و Y مجموعتين. يقال أن f راسم من X إلى Y، ويرمز لذلك بـ $f:X \rightarrow Y$، إذا أعطينا قاعدة

تعين لكل عنصر x في X عنصرا وحيدا $f(x) \in Y$. تسمى X، حينئذ، نطاق f، وتسمى Y النطاق المرافق لـ f. إذا كانت Y مجموعة من الأعداد الحقيقية، فيقال إن f دالة على X.

$f : X \longrightarrow Y$ أحادي إذا كانت $f(x_1) = f(x_2)$ تستلزم أن $x_1 = x_2$.

$f : X \longrightarrow Y$ راسم غامر إذا كانت المجموعة $f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$ وتسمى صورة f، مساوية لـ Y. إذا كان $f:X \longrightarrow Y$ أحاديا وغامرا، فيقال إن f تقابل.

إذا كان لدينا $f : X \longrightarrow Y$، ومجموعة جزئية A من X، فصورة A، $f(A)$، هي المجموعة $\{ f(a) : a \in A \}$. وإذا كانت B مجموعة جزئية من Y، فالصورة العكسية لها، $f^{-1}B$، هي المجموعة $\{ x : x \in X$ و $f(x) \in B \}$.

راسم المتطابقة للمجموعة X، $id : X \longrightarrow X$، أو id_X هو الراسم الذي يرسل x إلى x، $\forall x \in X$. إذا كانت A مجموعة جزئية من X، فراسم التضمين $j:A \longrightarrow X$ يرسل a إلى a، $\forall a \in A$.

إذا كان لدينا $f : X \longrightarrow Y$، ومجموعة جزئية A من X، فمقصور f على A، $f|A$، هو الراسم: $f|A : A \longrightarrow Y$ الذي يرسل a إلى $f(a)$، $\forall a \in A$.

إذا كان لدينا $f : X \longrightarrow Y$، و $g : Y \longrightarrow Z$، فتركيب f و g، gof، هو الراسم:

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

حيث $gof(x) = g(f(x)), \forall x \in X$.

فإذا كانت $X = Z$، وفضلا عن ذلك $gof = id_X$، و $fog = id_Y$، فيقال إن g معكوس الراسم f، أو الراسم العكسي لـ f، ويرمز له بـ f^{-1}.

يقال إن:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \overset{h}{\searrow} & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

شكل ابدالي للرواسم إذا كان $h = gof$

ويقال إن:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

شكل ابدالي للرواسم إذا كان $hof = kog$.

قابلية العد

يقال عن مجموعة X أنها قابلة للعد إذا كانت X مجموعة منتهية، أو كان هنالك تقابل $f:N \longrightarrow X$.

سوف نفترض النظرية أن Q قابلة للعد، وأن كل فترة من R تحوي أكثر من نقطة، غيرُ قابلة للعد.

المتواليات والمتسلسلات

إذا كان $f: N \longrightarrow X$ راسما، ووضعنا $x_n = f(n)$، فيقال إن (x_n) متوالية في المجموعة X. إذا كانت (x_n) متوالية في R، فهي تقاربية إذا كان هنالك $x \in R$ يحقق الشرط التالي: $\forall\ \varepsilon > 0$، توجد $m \in N$ بحيث أن $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall\ n \geq m$. يقال حينئذ إن x نهاية (x_n). إذا لم تكن (x_n) تقاربية، فيقال إنها تباعدية.

إذا كانت (x_n) متوالية في R، وأخذنا $s_m = x_1 + \dots + x_m$، $\forall\ m \in N$، وإذا كانت (s_m) متوالية تقاربية، فيقال إن المتسلسلة $\sum_1^{\infty} x_n$ تقاربية. إذا كانت المتسلسلة $\sum_1^{\infty} |x_n|$ تقاربية، فيقال إن $\sum_1^{\infty} x_n$ تقاربية تقاربا مطلقا.

نفترض الالمام باختبار المقارنة.

العلاقات

إذا كانت X مجموعة غير خالية، فيقال إن S علاقة على X إذا كانت S مجموعة جزئية من $X \times X$. إذا كان $(a,b) \in S$، فيرمز لذلك بـ aSb.

S علاقة تكافؤ على X إذا كانت S علاقة على X تحقق الشروط التالية:

(i) S منعكسة: $(x, x) \in S$, $\forall\ x \in X$.

(ii) S متناظرة: $(x, y) \in S$ يستلزم أن $(y, x) \in S$.

(iii) S متعدية: (x, y) و $(y, z) \in S$ يستلزم أن $(x, z) \in S$.

إذا كانت S علاقة تكافؤ على X، و $x \in X$ ففصل التكافؤ الذي يمثله x هو المجموعة

$$\{ y : y \in X, \text{ و } xSy \}.$$

الزمر

إذا كانت G مجموعة غير خالية، وكان $\cdot\ G \times G \longrightarrow G$ راسما، فيقال إن $\cdot$ عمليةٌ ثنائيةٌ على G.

إذا كانت G مجموعة غير خالية، وعليها عملية ثنائية $\cdot$، ورمزنا لـ

$$\cdot\,(g_1, g_2) \text{ بـ } g_1 \cdot g_2\ ,\ \forall\ (g_1, g_2) \in G \times G$$

فيقال إن G زمرة بالنسبة للعملية الثنائية $\cdot$ إذا تحققت الشروط التالية؛

(i) $\cdot$ عملية تجميعية أي أن: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ $\forall\ g_1$ و g_2 و $g_3 \in G$.

(ii) يوجد عنصر $e \in G$، يسمى العنصر المحايد، بحيث أن:

$$g = g \cdot e = e \cdot g\ ,\ \forall\ g \in G.$$

(iii) $\forall g \in G$، يوجد $g^{-1} \in G$، يسمى معكوس g، بحيث أن:

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

إذا كانت G زمرة بالنسبة للعملية *، و´G زمرة بالنسبة للعملية´*، و $f:G \longrightarrow G'$ راسما، فهو تشاكل إذا كان:

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) *' f(g_2) \;,\; \forall g_1 \text{ و } g_2 \in G.$$

إذا كان لدينا تشاكل $f : G \longrightarrow G'$، وفضلا عن ذلك كان f تقابلا، فيقال إنه تشاكل تقابلي وأن G و ´G زمرتان متشاكلتان تقابليا.

الزمرة التافهة هي الزمرة التي تحوي عنصرا واحدا فقط.

الفصل الأول

الفضاءات المترية

Metric Spaces

مقدمة

يلعب مفهوم الاستمرار[1] دورا بارزاً في الرياضيات. فعلى سبيل المثال فإن خواص الدوال المستمرة المتمثلة في نظرية القيمة الوسطى، ووجود نقطة عظمى ونقطة صغرى للدالة المستمرة على الفترة المغلقة، وتكافؤ الاستمرار والاستمرار المنتظم على الفترة المغلقة، تشكل الأساس بالنسبة للتحليل الحقيقي.

والتبولوجيا هي دراسة الاستمرار من وجهة نظر هندسية. والاطار المناسب لهذه الدراسة هو إطار الفضاءات التبولوجية. وفي هذا الفصل، نقدم نوعا خاصا منها: الفضاءات المترية، والتي تشمل أهم الأمثلة الطبيعية للفضاء التبولوجي، وتتمتع بكيانات تبولوجية غنية، كما تبين الفصول القادمة.

يرجع تعريف الفضاء المترى إلى فريشي[2] (١٩٠٦ م). والفضاء المتري، وفق تعريفه، يتكون من مجموعة غير خالية X، مزودة بدالة: $d:X\times X\longrightarrow R$، تسمى دالة المسافة، وتحقق d شروطا تتناسب مع مفهوم « المسافة ».

وهذا التعريف يتيح لنا وضع مفهوم الاستمرار في إطار الفضاءات المترية، بتعميم مباشر لتعريف $\varepsilon - \delta$ في التحليل الحقيقي، كما سوف نبين في الجزء الثاني من هذا الفصل. وإذ نعبر عن الاستمرار بلغة المجموعات المفتوحة (في الجزء الثالث)، فإننا نمهد الطريق لتعريف الفضاء التبولوجي، في الفصل الثاني، حيث لا نفترض عندئذ وجود دالة مسافة، وتتولى المجموعات المفتوحة التعبير عن مفهوم « القرب ».

---

(١) Continuity

(٢) Frechet

١ - تعريف الفضاء المتري

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن:

$$d : X \times X \longrightarrow R$$

دالة تحقق الشروط التالية:

م١. $d(x, y) \geq 0$, و $d(x, y) = 0$ اذا و إذا فقط كانت $x=y$, $\forall$ x و y $\in$ X.

م٢. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall$ x و y $\in$ X.

م٣. متباينة المثلث: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall$ x , y , z $\in$ X.

حينئذ يقال إن d **مترك**[١] على X، وأن الزوج (X,d) **فضاء متري**[٢].

١,٠١ **مثال.** إذا أخذنا $X = R^n$، فالدالة:

$$d : R^n \times R^n \longrightarrow R$$

حيث $d(x, y) = \sqrt{\left(\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right)}$, $\forall$ x , y $\in R^n$

تعرف متركا على R^n. فمن الجلي أن d تستوفي الشرطين م١ وم٢. استنادا على متباينة شوارز[٣].

$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right) \leq \left(\sum_1^n a_i^2\right)^{1/2} . \left(\sum_1^n b_i^2\right)^{1/2}$$

أيا كانت الأعداد الحقيقية $a_1 , \ldots , a_n , b_1 , \ldots , b_n$، فإن

$$\sum_1^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_1^n a_i^2 + 2\left(\sum_1^n a_i^2\right)^{1/2} . \left(\sum_1^n b_i^2\right)^{1/2} + \sum_1^n b_i^2 .$$

يترتب على ذلك، أن

$$\sqrt{\left(\sum_1^n (a_i + b_i)^2 \right)} \leq \sqrt{\left(\sum_1^n a_i^2 \right)} + \sqrt{\left(\sum_1^n b_i^2 \right)} \ldots (*)$$

بأخذ $a_i = x_i - y_i$, و $b_i = y_i - z_i$ في (*)، يتضح حينئذ أن d تحقق أيضاً الشرط م٣ (متباينة الثلث).

إذن d مترك على R^n.

---

(١) Metric

(٢) Metric space

(٣) Schwarz

يُعرَف الفضاء المتري (R^n, d) **بالفضاء الاقليدي ذي البعد** n[١]، ويسمى المتركُ d **المترك المعتاد على** R^n

١,٠٢ **مثال**. إذا عرفنا

$$d': R^n \times R^n \longrightarrow R$$

على النحو التالي: $d'(x, y)$ = أكبر الأعداد: $|x_i - y_i|$، $1 \le i \le n$، كان لدينا مترك آخر على R^n. فمن الجلي، أن d' يستوفي الشرطين م١، وم٢. بما أن

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \le d'(x, y) + d'(y, z)$$

من ثم، فإن:

$$d'(x, z) \le d'(x, y) + d'(y, z), \forall\ x, y, z \in R^n.$$

إذن d' مترك على R^n.

١,٠٣ **مثال**. لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن d الدالة المعرفة على X×X على النحو التالي:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كانت } x = y \\ 1 & \text{إذا كانت } x \ne y. \end{cases}$$

يطلق على d اسم **المترك التافه** وعلى الفضاء (X,d) اسم **الفضاء التافه**[٢] X.

١,٠٤ **مثال**. لتكن $M_n(R)$ مجموعة المصفوفات الحقيقية المربعة n×n. إذا كانت $A = (a_{ij})$، و $B = (b_{ij}) \in M_n(R)$، فلنعرف:

$$d(A,B) = \left(\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2\right)^{1/2}.$$

حينئذ فإن d متركٌ على $M_n(R)$، يدعى المترك المعتاد، ويدعى الفضاء المتري $(M_n(R),d)$ فضاء المصفوفات $M_n(R)$.

١,٠٥ **مثال**. اعتبر $C(I)$، مجموعة الدوال الحقيقية المستمرة على I. إذا عرفنا:

$$d_1(f, g) = \text{حعا} \left\{ |f(x) - g(x)| : 0 \le x \le 1 \right\}, \forall\ f, g \in C(I)$$

---

(١) n-dimensional Euclidean space

(٢) The trivial space

فمن السهل التثبت من أن d_1 مترك على C(I).

١,٠٦ **مثال.** ثمة مترك آخر على C(I) نود تقديمه، فنعرف

$\forall$ f و g ∋ C (I) :

$$d_2 (f, g) = \int_0^1 |f - g|$$

نترك للطالب مهمة التثبت من تحقيق شروط المترك في الأمثلة ١,٠٣–١,٠٦ .

إذا كان (X, d) فضاء متريا، و A مجموعة جزئية غير خالية من X، فإنها تكتسب متركا من X، حين نقصر d على النطاق الجزئي A×A.

تعريف. إذا كان لدينا فضاء متري (X,d)، ومجموعة جزئية غير خالية A من X، **فالفضاء الجزئي**[١] A هو الفضاء المتري $(A, d|A \times A)$.

دلالة. (١). إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbf{R}^n$، فإذا تحدثنا عن الفضاء A، دون تحديد مترك عليه، فإننا نعني حينئذ الفضاء الجزئي $(A, d|A \times A)$، حيث d المترك المعتاد على $\mathbf{R}^n$.

(٢). ما لم يكن هنالك احتمال لوقوع التباس، فسوف نرمز للفضاء المتري بالرمز X بدلا من (X,d).

٢– الرواسم المستمرة

كما أشرنا في مستهل هذا الفصل، فإن تعريف الراسم المستمر بين فضاءين متريين، تعميم مباشر لتعريف $\varepsilon - \delta$ في التحليل الحقيقي. ها هو التعريف:

تعريف: ليكن (X, d) و (Y, d′) فضاءين متريين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ راسما، ولتكن a نقطة في X. يقال إن f **مستمر**[٢] عند a إذا كان يستوفي الشرط التالي:

إذا كانت $\varepsilon > 0$، فإنه توجد $\delta > 0$ بحيث أن:

كلما كانت x ∋ X، و $d(a, x) < \delta$، فحينئذ

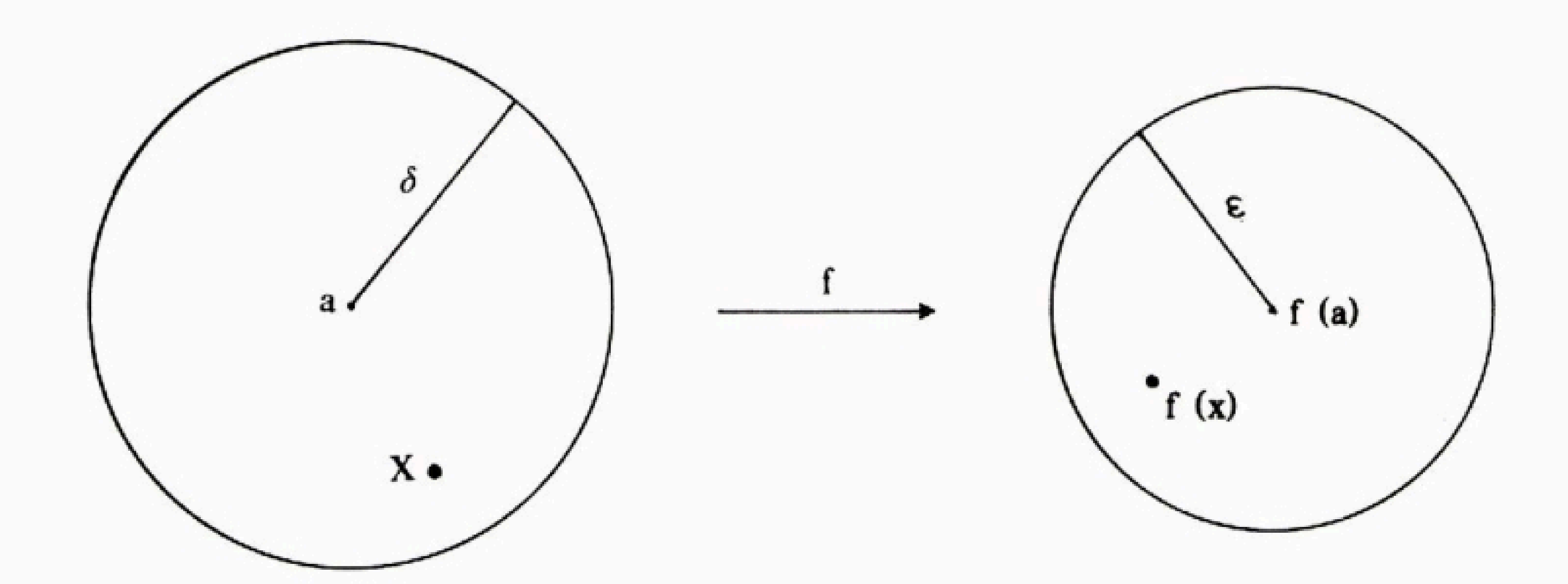
$d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$ (الشكل ١,٠١).

ويقال إن $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ راسم مستمر إذا كان f مستمرا عند كل a ∋ X.

---

(١) The subspace

(٢) Continuous



الشكل (١،٠١) : الاستمرار عند نقطة

١،٠٧ **مثال**. إذا اعتبرنا الفضاء المعتاد R، وأخذنا الدالة $f:R\longrightarrow R$ حيث $f(x)=x^2$, $\forall x \in R$، فإننا نجد أنها دالة مستمرة.

للتحقق من ذلك، نفرض أن $a \in R$. لتكن $\varepsilon > 0$. حينئذ:

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2|$$
$$= |x+a|.|x-a|$$
$$\le (1+2|a|).|x-a|$$

عندما يكون $|x-a| < 1$. إذا أخذنا δ = أصغر العددين: ١ و $\frac{\varepsilon}{1+2|a|}$، فيتضح لنا أن $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ كلما كان $|x-a| < \varepsilon$. إذن f مستمر عند a.

١،٠٨ **مثال**. ليكن d_1 و d_2 المتركين على C(I) الواردين في مثالي ١،٠٥ و١،٠٦. حينئذ $id:(C(I),d_1)\longrightarrow (C(I),d_2)$ راسم مستمر.

ذلك لأن:

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f-g| \le \text{حعا}\{|f(x)-g(x)| : x \in I\} = d_1(f,g)$$

$\forall f,g \in C(I)$. في ضوء هذه المتباينة، يتضح أنه إذا كانت $\varepsilon > 0$، فبامكاننا اختيار $\delta = \varepsilon$، فيتحقق شرط الاستمرار.

١,٩ مثال. إذا اعتبرنا فضاء تافها (X, d)، كما في مثال ١,٣، وإذا كان (Y, d') فضاء متريا ما، حينئذ كل راسم $f:(X,d) \longrightarrow (Y,d')$ يكون مستمرا. لرؤية هذه الحقيقة، نفرض أن $a \in X$، و $\varepsilon > 0$. لنضع $\delta = \frac{1}{2}$ من ثم، فإن $d(a,x) < \delta$ يستلزم أن $a=x$، ولذا فإن $d'(f(a), f(x)) = 0 < \varepsilon$.

إن التصور الحدسي للراسم المستمر هو أنه ذاك الذي يستوفي الشرط:

«كلما اقتربت x من a اقتربت $f(x)$ من $f(a)$». باستخدام لغة المتواليات، فيما يلي: نحصل على صيغة أخرى لمفهوم الاستمرار، تعبر بوضوح أكثر عن الصورة الحدسية.

تعريف. ليكن (X, d) فضاء متريا، و (x_n) متوالية في X، و $a \in X$. يقال إن (x_n) **تؤول**[١] إلى a عندما تؤول n إلى ∞ إذا كانت متوالية الأعداد: $d(a,x_n)=a_n$ تؤول إلى 0 عندما تؤول n إلى ∞. في هذه الحالة، يقال إن (x_n) **متوالية تقاربية**[٢]، **نهايتها**[٣] النقطة a. إذا كانت (x_n) غير تقاربية، فيقال إنها **تباعدية**[٤].

١,١٠ نظرية. إذا كان $f:(X, d) \longrightarrow (Y, d')$ راسما، فلكي يكون f مستمرا عند $a \in X$ فيلزم ويكفي أنه كلما كانت (x_n) متوالية تؤول إلى a في (X,d)، فحينئذ تؤول $(f(x_n))$ إلى $f(a)$ في (Y,d').

البرهان. لنفرض أولا أن f مستمر عند a. لتكن (x_n) متوالية تؤول إلى a في X. إذا كانت $\varepsilon > 0$، فيترتب على استمرار f عند a وجود $\delta > 0$ بحيث أن: $x \in X$، و $d(a,x) < \delta$ يستلزم أن: $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$. الآن يوجد عدد طبيعي m بحيث أن $d(a,x_n) < \delta$، $\forall\, n \geq m$. من ثم، فإن $d'(f(a), f(x_n)) < \delta$، $\forall\, n \geq m$، مما يبين أن $(f(x_n))$ تؤول إلى $f(a)$ في Y.

ننتقل لاثبات العكس الآن. لنفرض جدلا أن f غير مستمر عند a. من ثم، فهنالك $\varepsilon > 0$ تحقق الشرط التالي: $\forall\, \delta > 0$، توجد $x \in X$ بحيث أن $d(a,x) < \delta$ ولكن $d'(f(a), f(x)) \geq \varepsilon$. بصفة خاصة، $\forall\, n \in N$ ثمة $x_n \in X$ بحيث أن $d(a,x_n) < \frac{1}{n}$، و $d'(f(a), f(x_n)) \geq \varepsilon$. يترتب على ذلك أن (x_n) تؤول إلى a. بيد أن $(f(x_n))$ لا تؤول إلى $f(a)$. □

كتطبيق لهذه النظرية نبين أن:

---

(١) Converges

(٢) Convergent

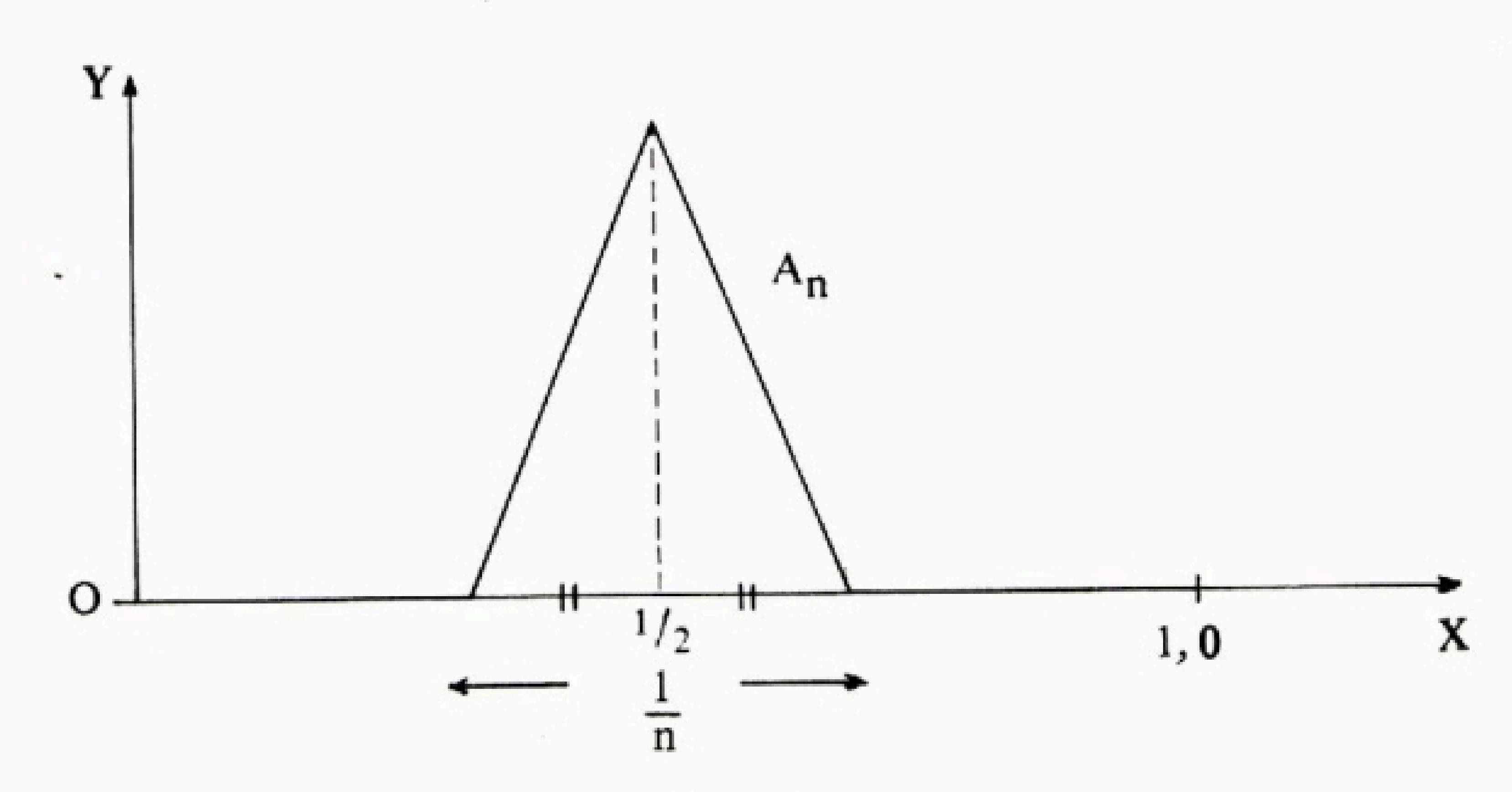
(٣) Its limit

(٤) Divergent

١,١١ **مثال**. راسم المتطابقة:

$$id : (C(I), d_2) \longrightarrow (C(I), d_1)$$

غير مستمر. كي نثبت ذلك، نعتبر متوالية الدوال (f_n) حيث $f_n : I \longrightarrow R$ الدالة التي لها المنحنى المبين في الشكل ١,٢ .



الشكل (١,٢) : منحنى f_n

إن (f_n) تؤول الى الدالة الثابتة O في $C(I), d_2)$ لأن

$$d_2(O, f_n) = \text{مساحة المثلث } A_n \qquad \text{(الشكل ١,٢)}$$
$$= \frac{1}{2n}$$

بيد أن (f_n) لا تؤول إلى O في $(C(I), d_1)$، لأن $1 = d_1(O, f_n)\ \forall n \in N$. إذن $id : (C(I), d_2) \longrightarrow (C(I), d_1)$ غير مستمر.

في ختام هذا الجزء نتحدث عن نوع خاص من الرواسم المستمرة، تسمى التكافؤات المترية.

تعريف. ليكن $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ راسما غامرا، ويحافظ على المسافة بمعنى أن:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

$\forall\ x_1, x_2 \in X$. حينئذ يقال إن f تكافؤ متري[١].

---

(١) Isometry

إذا كان هنالك تكافؤ متري من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y، فيقال إن X **مكافىء متريا**[١] لـ Y.

١,١٢ مثال. إذا كان f دوران R^2 حول نقطة الأصل خلال زاوية θ ، فإن f تكافؤ متري.

١,١٣ مثال. فضاء المصفوفات $M_n(R)$ مكافىء متريا لـ R^{n^2}. نُعرِّف $f:M_n(R) \to R^{n^2}$ على النحو التالي: إذا كانت $A=(a_{ij}) \in M_n(R)$، فنعرف:

$$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, a_{31}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

من السهل اثبات أن f تكافؤ متري.

١,١٤ نظرية. (أ) إذا كان $f:(X,d) \to (Y,d')$ تكافؤا متريا، فحينئذ f تقابل من X إلى Y. علاوة على ذلك، فإن f و f^{-1} راسمان مستمران.

(ب) علاقة التكافؤ المتري تعرف علاقة تكافؤ على مجموعة الفضاءات المترية.

البرهان. (أ) f أحادي: إذا كانت x_1 و $x_2 \in X$، و $f(x_1)=f(x_2)$ حينئذ $0=d'(f(x_1), f(x_2))=d(x_1,x_2)$، مما يستلزم أن $x_2=x_1$. إذن f راسم أحادي. بما أن f غامر أيضاً، فيكون تقابلا.

كي نبين أن f راسم مستمر، نأخذ $\varepsilon > 0$، ونختار $\delta = \varepsilon$. إذن كلما كانت x_1 و $x_2 \in X$، و $d(x_1,x_2) < \varepsilon$، فإن: $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

الآن نبرهن أن $g = f^{-1}$ راسم مستمر، باثبات أن $g:Y \to X$ تكافؤ متري. إذا كانت y_1 و $y_2 \in Y$، و $x_1=g(y_1)$، و $x_2=g(y_2)$ حينئذ $f(x_1)=y_1$، و $f(x_2)=y_2$. يترتب على ذلك، أن

$$d(g(y_1), g(y_2)) = d(x_1,x_2) = d'(f(x_1), f(x_2)) = d'(y_1,y_2)$$

مما يبين أن g تكافؤ متري.

(ب) إذا كان X فضاء متريا ما، فإن $id:X \to X$ تكافؤ متري، ولذا فإن X مكافىء متريا لنفسه.

استنادا على برهان (أ)، إذا كان $f:X \to Y$ تكافؤا متريا، فيترتب على ذلك أن $f^{-1}:Y \to X$ تكافؤ متري. إذن علاقة التكافؤ المتري علاقة متناظرة.

---

(١) Isometric

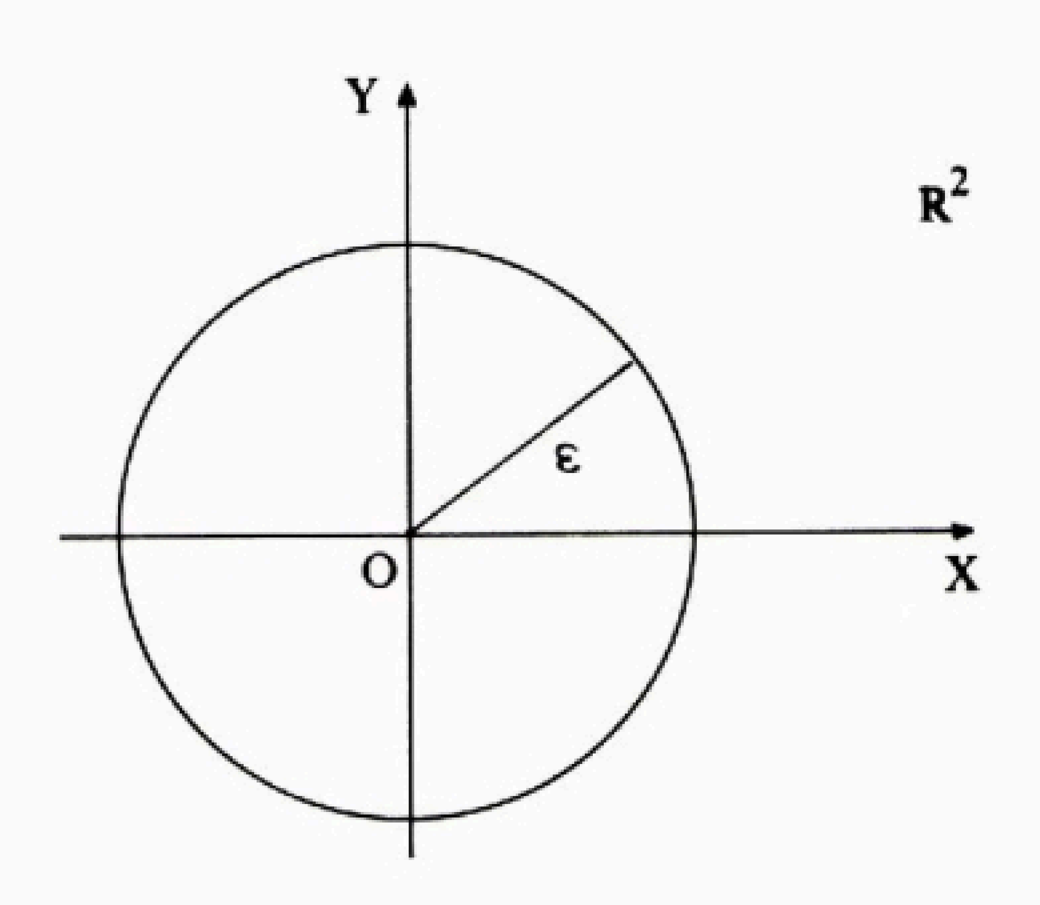
أخيرا فإن تركيب تكافؤين متريين هو تكافؤ متري، مما نستنتج منه أن علاقة التكافؤ المتري متعدية. إذن هي علاقة تكافؤ. □

٣- المجموعات المفتوحة

تعريف. ليكن (X, d) فضاء متريا، ولتكن a نقطة في X، و $\varepsilon > 0$. القرص المفتوح[١] ذو المركز a ونصف القطر ε، أو جوار -ε المفتوح[٢] لـ a ويرمز له بـ $B(a; \varepsilon)$، هو المجموعة $B(a;\varepsilon) = \{x \in X : d(a,x) < \varepsilon\}$.

القرص المغلق[٣] ذو المركز a ونصف القطر ε، أو جوار -ε المغلق لـ a[٤] هو المجموعة $\{x \in X : d(a,x) \leq \varepsilon\}$.

١,١٥ **مثال.** إذا اعتبرنا الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^2$، فحينئذ $B(0; \varepsilon)$ هو مجموعة النقاط داخل الدائرة التي مركزها O، ونصف قطرها ε.



الشكل (١,٣) $B(0; \varepsilon)$ في الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^2$

أما في الفضاء المتري $(\mathbf{R}^2, d')$ (مثال ١,٢)، فإن $B(0; \varepsilon)$ هو مجموعة النقاط داخل محيط المربع ذي الأركان $(\pm\varepsilon, \pm\varepsilon)$.

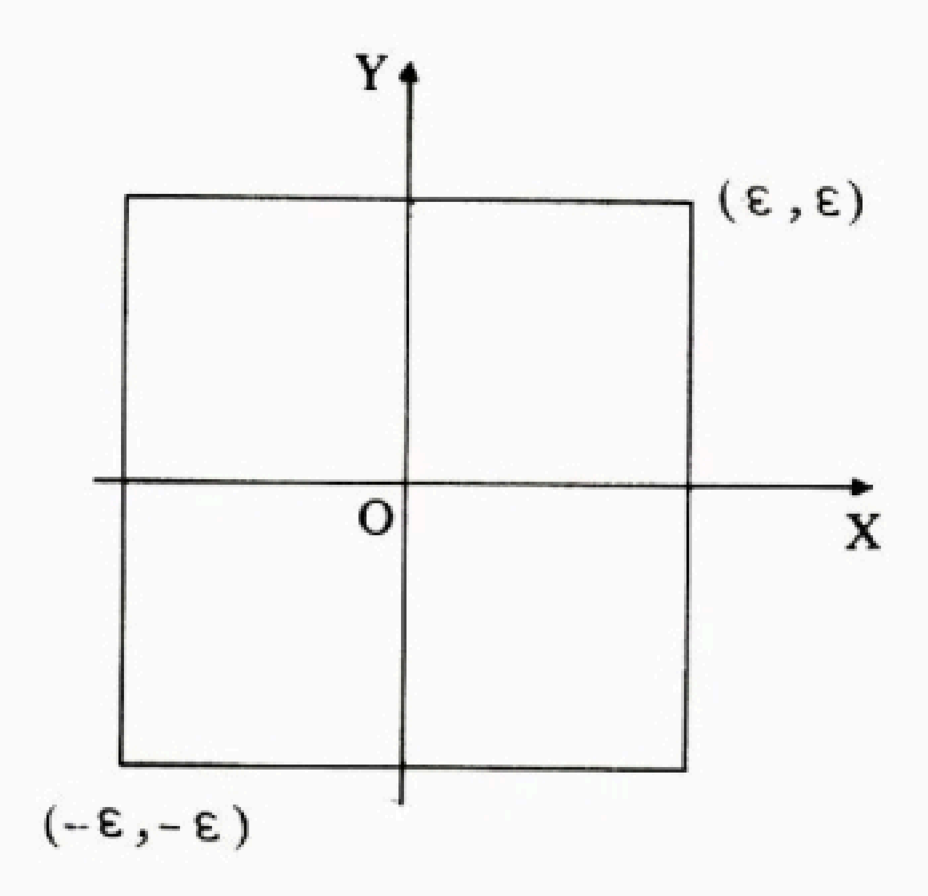
---

(١) The open disc

(٢) Open ε -neighbourhood

(٣) The closed disc

(٤) Closed ε -neighbourhood

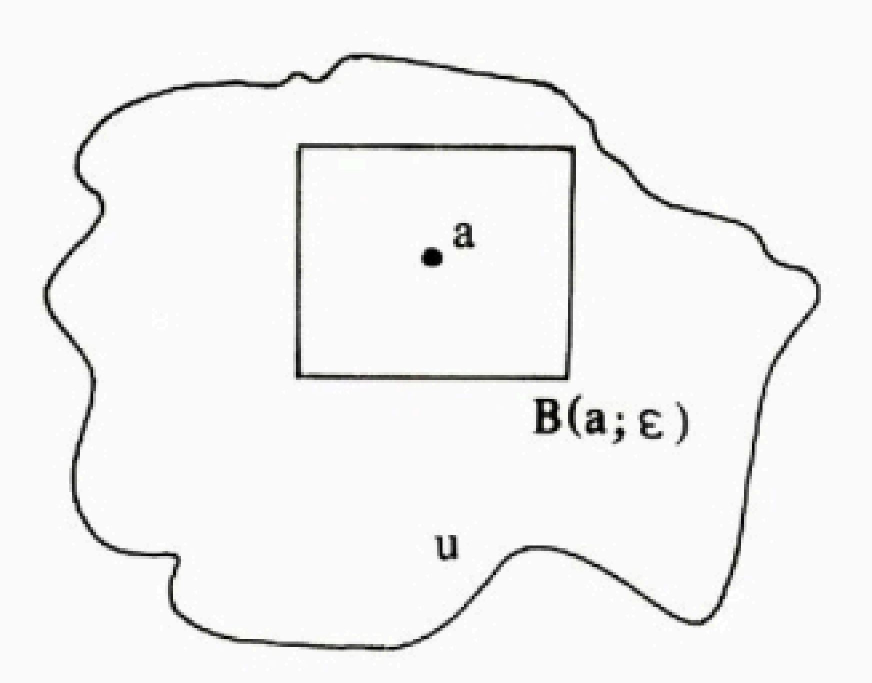


الشكل (١،٠٤) : B (0; ε) في الفضاء (R^2, d')

تعريف. إذا كانت U مجموعة جزئية من فضاء متري X، فيقال إن U **مفتوحة**[١] في X إذا استوفت الشرط التالي:

$\forall$ a $\in$ U، يوجد قرص مفتوح B (a; ε) محتوى في U.

إذا كانت F مجموعة جزئية من فضاء متري X، فيقال إن F **مغلقة**[٢] في X إذا كانت متممة F مفتوحة في X.



الشكل (١،٥) : المجموعة المفتوحة

---

(١) Open

(٢) Closed

١,١٦ **مثال**. كل قرص مفتوح $B(a;\varepsilon)$ في فضاء متري (X,d) هو مجموعة مفتوحة. لأنه إذا كانت $x \in B(a;\varepsilon)$، وأخذنا $r=\varepsilon-d(a,x)$، فاستنادا على متباينة المثلث (م٣)، فإن $B(x;r)$ محتوى في $B(a;\varepsilon)$.

١,١٧ **مثال**. مجموعة المجموعات المفتوحة في الفضاء التافه X، تتطابق مع مجموعة القوة لـ X.

النظرية التالية تلخص أهم خواص مجموعة المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري.

١,١٨ **نظرية**. إذا كانت $\mathcal{U}$ مجموعة المجموعات المفتوحة في فضاء متري X حينئذ:

(i) ϕ و $X \in \mathcal{U}$

(ii) $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي[1]: أي أنه إذا كانت $\{U_k : k \in K\}$ مجموعة جزئية من $\mathcal{U}$، فحينئذ $\bigcup_K U_k \in \mathcal{U}$.

(iii) $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي[2]: ذلك يعني أنه إذا كانت $n \in N$، و $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$، فحينئذ $\bigcap_1^n U_i \in \mathcal{U}$.

البرهان. اثبات (i) مباشر من تعريف المجموعة المفتوحة.

(ii) لنفرض أن $a \in \bigcup_K U_k$. من ثم، فهنالك $k_1 \in K$ بحيث أن U_{k_1} تحوي a. يترتب على ذلك وجود قرص مفتوح $B(a;\varepsilon)$ محتوى في U_{k_1}. إذن $B(a;\varepsilon)$ محتوى في $\bigcup_K U_k$، مما يبين أن $\bigcup_K U_k$ مجموعة مفتوحة في X.

(iii) إذا كانت $a \in \bigcap_1^n U_i$، فبما أن كلا من $U_1,\dots,U_n$ مجموعة مفتوحة في X، حينئذ ثمة $B(a;\varepsilon_i)$ محتوى في U_i, $1 \le i \le n$ ليكن ε أصغر الأعداد ε_i, $1 \le i \le n$. إذن $B(a;\varepsilon)$ يحوي $\bigcap_1^n U_i$، ومن ثم فإن $\bigcap_1^n U_i$ مجموعة مفتوحة في X. □

انطلاقا من مفهوم المجموعة المفتوحة، نسوق الآن خاصة مميزة للاستمرار، لا يرد فيها ذكر المترك.

١,١٩ **نظرية**. ليكن X و Y فضاءين متريين. إذا كان لدينا راسم $f: X \to Y$ فلكي يكون f مستمرا فإنه يلزم ويكفي أن تكون $f^{-1}V$ مفتوحة في X كلما كانت V مفتوحة في Y.

البرهان. لنفرض أن f راسم مستمر، وأن V مجموعة مفتوحة في Y. إذا كانت $f^{-1}V$ المجموعة الخالية، فتكون مفتوحة في X. إذا كانت $a \in f^{-1}V$، فذلك يعني أن $f(a) \in V$، ولذا فثمة قرص مفتوح $B(f(a);\varepsilon)$

---

(١) Arbitrary union

(٢) Finite Intersection

تحويه V. نظرا لاستمرار f عند a، فهنالك $\delta>0$، بحيث أن $f(B(a;\delta))$ محتواة في $B(f(a);\varepsilon)$. إذن $B(a;\delta)$ مجموعة جزئية من $f^{-1}V$، ومن ثم فإن $f^{-1}V$ مفتوحة في X.

نمضي الآن لاثبات العكس. نأخذ $a \in X$، و$\varepsilon>0$. بما أن $B(f(a);\varepsilon)=V$ مجموعة مفتوحة في Y، إذن $f^{-1}V$ مجموعة مفتوحة في X وتحوي a. من ثم، فهنالك $\delta>0$ بحيث أن $B(a;\delta)$ محتوى في $f^{-1}V$. يترتب على ذلك أن $f(B(a;\delta))$ محتواة في $B(f(a);\varepsilon)=V$، مما يعني أن f مستمر عند a. □

تمارين (١)

الجزء الأول

١ ـ بين بالتفصيل أن المترك المعرف في كل من الأمثلة ١,٣-١,٦ يحقق الشروط م١، م٢، م٣.

٢ ـ ليكن d المترك المعتاد على R^n و d' المترك المعرف في مثال ١,٢ . أثبت أن

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} \,.\, d'(x, y)$$

$\forall\, x, y \in R^n$.

٣ ـ لتكن X مجموعة الدوال القابلة للمكاملة على I. لنعرّف

$$d(f, g) = \int_0^1 |f - g| \,,\; \forall\, f, g \in X$$

بيّن أن d ليس متركا على X.

الجزء الثاني

٤ ـ اثبت، من التعريف مباشرة، أن f راسم مستمر في كل مما يأتي:

(i) $f: R^2 \longrightarrow R$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

(ii) $f: R^2 \longrightarrow R$, $f(x_1, x_2) = x_1 \,.\, x_2$

(iii) $\det: M_n(R) \longrightarrow R$ حيث $\det A$ = مُحدِد A.

٥ ـ ليكن X فضاء متريا، و $C(X)$ مجموعة الدوال المستمرة على X.

$\forall\, f$ و $g \in C(X)$، نعرف الراسمين $f+g$ و $f.g$ على النحو التالي:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \,.\, g(x) = f(x) \,.\, g(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

اثبت أن $f + g$ و $f \,.\, g \in C(X)$.

إذا كان $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in X$ ، بيّن أن $f/g \in C(X)$

حيث $f/g(x) = f(x)/g(x)$, $\forall\, x \in X$.

٦ ـ (أ) برهن أنه إذا كانت (x_n) متوالية تقاربية في فضاء متري، فنهايتها نقطة فريدة.

(ب) أثبت أنه إذا كانت (x_n) متوالية تقاربية في فضاء تافه X ، فتوجد m بحيث أن:

$$x_m = x_{m+1} = x_{m+2} = \dots$$

٧ ـ برهن أن تركيب راسمين مستمرين بين فضاءات مترية يكون مستمرا .

٨ ـ أثبت أن (R^2, d) غير مكافيء متريا لـ (R^2, d'). (d و d′ المتركان المعرفان في مثالي ١,١ و١,٢).

٩ ـ برهن أن:

(أ) R^n غير مكافيء متريا لـ R ، $n > 1$.

(ب) R^n غير مكافيء متريا لـ R^2 ، $n \neq 2$.

الجزء الثالث

١٠ ـ قرر ما إذا كانت المجموعة A (أ) مفتوحة (ب) مغلقة ، في الفضاء الاقليدي R^2 ، في كل مما يأتي:

(i) $A = \{ (\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m, n \in N \}$

(ii) $A = \{ (n, \frac{1}{n}) : n \in N \}$

(iii) $A = S^1$

(iv) $A = \{ (x, y) : y > 0 \}$

(v) $A = \{ (x, y) : y \neq e^x \}$

١١ ـ ليكن X فضاءً متريا . بيّن أن X فضاءٌ هاوسدورف ، بمعنى أنه إذا كانت a و $b \in X$ ، و $a \neq b$ ، فثمة جوار مفتوح لـ a ، وجوار مفتوح لـ b ، بحيث لا يتقاطعان . من ثم ، استنتج أن $\{ a \}$ مغلقة في X ، $\forall a \in X$.

١٢ ـ باستخدام الدالة:

$$\det : M_n(R) \longrightarrow R$$

بيّن أن مجموعة المصفوفات $n \times n$ القابلة للعكس مفتوحة في $M_n(R)$.

١٣ ـ برهن أنه إذا كان f راسما من فضاء متري X إلى فضاء متري Y ، فلكي يكون مستمرا فإنه يلزم ويكفي أن تكون $f^{-1}G$ مغلقة في X كلما كانت G مغلقة في Y.

١٤ ـ إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين ، غير خاليتين ، من فضاء متري (X,d) ، فالمسافة[١] بينهما ، $d(A,B)$ ، تعرف على النحو التالي:

---

(١) The distance

$d(A, B) =$ حسا $\{ d(a, b) : a \in A$ و $b \in B \}$

بيّن أنه إذا كانت A مغلقة في X، و $b \notin A$، فحينئذ $d(A,b) > 0$، حيث $d(A, \{b\}) = d(A,b)$.

١٥- ليكن (X, d) فضاء متريا. لتكن A و B مجموعتين مغلقتين في X، وكلاهما غير خالية، ولا تتقاطعان. برهن أن الدالة: $f: X \to R$ حيث

$$f(x) = \frac{d(A, x)}{d(A, x) + d(B, x)}, \quad \forall x \in X$$

تحقق الشرطين التاليين:

(أ) f دالة مستمرة.

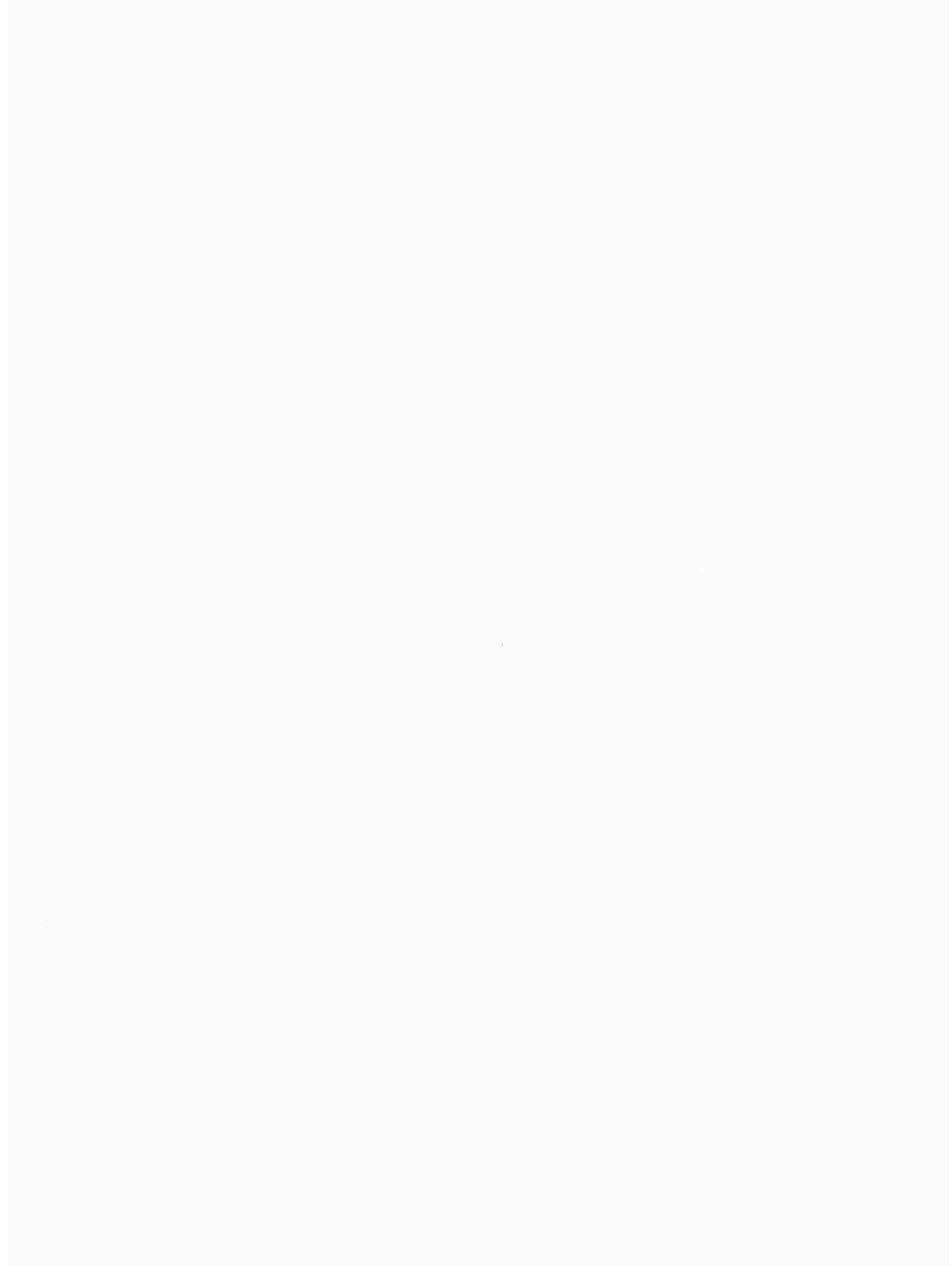
(ب) $f(A) = \{0\}$، و $f(B) = \{1\}$، و $f(X)$ محتواة في I.

١٦- إذا كانت F مجموعة المجموعات المغلقة في فضاء متري X، بيّن أن:

(أ) ϕ و $X \in F$

(ب) F مغلقة بالنسبة للاتحاد المنتهي.

(جـ) F مغلقة بالنسبة للتقاطع الكيفي.



الفصل الثاني

الفضاءات التبولوجية

Topological Spaces

مقدمة

في هذا الفصل، نعمم ما قدمناه من مفاهيم في الفصل الأول، فنقوم بتعريف (i) الفضاء التبولوجي و(ii) الراسم المستمر بين فضاءين تبولوجيين. والاثنان معاً يشكلان موضوع الدراسة في التبولوجيا.

وتعريف الفضاء التبولوجي قد تبلور إلى شكله الحالي بعد عدة سنوات من مطلع هذا القرن، على أيدي هاوسدورف[١]وفريشي[٢] وكوراتوسكي[٣] وتيتز[٤]. أما الرواد الأوائل في التبولوجيا من أمثال موبيس[٥] وريمان[٦] وبوا نكاريه[٧]، فقد أولوا اهتمامهم لبحث النتائج والنظريات المترتبة على الأفكار التبولوجية، معتمدين على الحدس الهندسي كمنطلق لأعمالهم.

والفضاء التبولوجي يتكون من مجموعة غير خالية X، ومجموعة من المجموعات الجزئية من X، تسمى المجموعات المفتوحة في الفضاء، تحقق شروطاً معينة. أما دور المجموعات المفتوحة فهو أن تتولى مهمة التعبير عن مفهوم الاستمرار، مثل ما حدث في إطار الفضاءات المترية. فالفضاء التبولوجي تجريد رياضي لمفهوم الشكل الهندسي، وتعميم لمفهوم الفضاء المتري.

بعد تعريف الفضاء التبولوجي، يأتي التساؤل الهام: إذا كان لدينا فضاءان تبولوجيان، متى نعتبرهما متكافئين تبولوجيا؟ والإجابة على ذلك أن يكون هنالك تقابل مستمر بينهما، له معكوس مستمر. ومن أمثلة التكافؤ التبولوجي إجراء الحركات المتماسكة[٨]، كما في الهندسة الأقليدية، وكذلك التشويهات

---

(١) Hausdorff

(٢) Fréchet

(٣) Kuratowski

(٤) Tietze

(٥) Möbius

(٦) Riemann

(٧) Poincaré

(٨) Rigid motions

المستمرة[١] على الشكل الهندسي، ما دامت لا تؤدي إلى تمزيق الشكل إلى أجزاء منفصلة، أو وصل نقاط مختلفة ببعضها البعض. أما الخواص التبولوجية، فهي التي لا تتأثر بإجراء تكافؤ تبولوجي، مثل الاتصال والتراص، واللذين سوف ندرسهما في الفصلين الرابع والخامس. من هذا، فإنه بالإمكان اعتبار التبولوجيا نوعاً من الهندسة، يتعلق بدراسة خواص هندسية عميقة (انظر [4]، الفصل الخامس).

١ ـ تعريف الفضاء التبولوجي

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية، وU مجموعة من المجموعات الجزئية من X، تستوفي الشروط التالية:

ت ١. ϕ و$X \in U$.

ت ٢. U مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي: أي أنه إذا كانت $\{U_k : k \in K\}$ مجموعة جزئية من U، فحينئذ $\bigcup_K U_k \in U$.

ت ٣. U مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي: أي أنه إذا كانت $n \in N$، و $U_1, \dots, U_n \in U$، فعندئذ $\bigcap_1^n U_i \in U$.

يقال حينئذ إن U تبولوجيا[٢] على X، وأن الزوج (X,U) **فضاء تبولوجي**[٣]، وتدعى عناصر U **المجموعات المفتوحة**[٤] في الفضاء (X,U).

إذا كان (X,U) فضاء تبولوجيا، فهو **فضاء هاوسدورف**[٥] (T_2) إذا كان بالإمكان فصل نقاط X على النحو التالي:

$\forall$ a و $b \in X$، $a \neq b$، هنالك مجموعة مفتوحة U_1 تحوي a ومجموعة مفتوحة U_2 تحوي b، وU_1 لا تقاطع U_2.

٢,٠١ مثال. كل فضاء متري X هو فضاء تبولوجي بطريقة طبيعية، إذ أن مجموعة المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري X تشكل تبولوجيا على X (نظرية ١,١٨).

٢,٠٢ مثال. إذا أخذنا $X = \{a,b,c\}$، فحينئذ:

$$U = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

تبولوجيا على X، إذ تحقق الشروط: ت١، ت٢، وت٣. بيد أن هذا الفضاء غير هاوسدورف، فالمجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي c هي X، ولذا فليس بالإمكان فصل a عن c أو b عن c.

(١) Continuous deformations
(٢) Topology
(٣) Topological space
(٤) Open sets
(٥) Hausdorff space

٢,٠٣ مثال. إذا كانت X مجموعة غير خالية، فإن $\mathcal{U} = \{X, \phi\}$ تبولوجيا على X تسمى **التبولوجيا اللامتقطعة**، ويطلق على الفضاء $(X,\mathcal{U})$ اسم **الفضاء اللامتقطع**(١).

في الطرف الآخر، فإن مجموعة القوة لـ X، تشكل تبولوجيا على X، تدعى **التبولوجيا المتقطعة**، ويسمى هذا الفضاء: **الفضاء المتقطع**(٢). من الواضح أنه فضاء هاوسدورف.

٢,٠٤ مثال. لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{U}$ المجموعة المشكلة من ϕ وكل مجموعة جزئية من X لها متممة منتهية. حينئذ فإن $\mathcal{U}$ تبولوجيا على X، يطلق عليها اسم **تبولوجيا المتممة المنتهية**، ويسمى الفضاء $(X,\mathcal{U})$ **فضاء المتممة المنتهية**(٣).

نترك للطالب مهمة التثبت من أن $\mathcal{U}$ تحقق الشروط ت١ - ت٣.

في ضوء مثال٢,٠١، يُتبين أن كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي، بطريقة طبيعية. أما العكس، فغير صحيح، كما سوف نبين الآن.

تعريف. إذا كان $(X,\mathcal{U})$ فضاء تبولوجيا، فيقال إنه **قابل للتعبير المتري**(٤) إذا كان هنالك مترك d على X بحيث أن مجموعة المجموعات المفتوحة في (X,d) تتطابق مع $\mathcal{U}$. في هذه الحالة، تسمى $\mathcal{U}$ **التبولوجيا الناشئة عن d**(٥).

بما أن كل فضاء متري هو فضاء هاوسدورف (تمارين (١)، مسألة ١١)، فاستناداً على مثال ٢,٠٢، يتضح لنا أن ثمة فضاءاتٍ تبولوجية غير قابلة للتعبير المتري. وجدير بالذكر أنه كان من بين المسائل الهامة في التبولوجيا إيجاد شرط لازمٍ وكافٍ لقابلية التعبير المتري. فمنذ ظهور نظرية التعبير المتري ليوريسون(٦) (١٩٢٤م)، والتي سوف نتناولها بالبرهان في الفصل الثامن، فقد ظلت هذه المسألة تسترعي الاهتمام والدراسة، وسيق العديد من النتائج حولها، من أبرزها نظرية نقاتا - سميرنوف(٧) ونظرية سميرنوف ([12]).

ملاحظات (i) إذا كانت X مجموعة غير خالية، و$\mathcal{U}_k$ تبولوجيا على X، لكل k في مجموعة K، فحينئذ يكون $\bigcap_K \mathcal{U}_k$ تبولوجيا على X.

(ii) إذا كانت كل من $\mathcal{U}_1$ و$\mathcal{U}_2$ تبولوجيا على مجموعة X، فلا يلزم أن تكون $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ تبولوجيا على X. على سبيل المثال، لنأخذ $X = \{a,b,c\}$. عندئذ

(١) The indiscrete space

(٢) The discrete space

(٣) Finite complement space

(٤) Metrizable

(٥) The topology induced by d

(٦) Urysohn

(٧) Ngata-Smirnov

كل من: $U_1 = \{ \phi , X , \{a\} , \{b\} , \{b,a\} \}$

و $U_2 = \{ \phi , X , \{a\} , \{c\} , \{c,a\} \}$

تبولوجيا على X، بيد أن $U_1 \cup U_2$ ليست تبولوجيا على X.

دلالة. ما لم يكن ثمة مجال لوقوع لبس، فسوف نرمز للفضاء التبولوجي (X,U) بالرمز X فقط.

٢- الرواسم المستمرة والتكافؤ التبولوجي

إذا ألقينا نظرة على نظرية ١,١٩، نجد أنها تلقي الضوء على كيفية تعريف الراسم المستمر بين فضاءين تبولوجيين:

تعريف. ليكن X و Y فضاءين تبولوجيين، وليكن f راسماً من X إلى Y. لتكن a نقطة في X. يقال إن f مستمر عند a إذا كان يحقق الشرط التالي:

كلما كانت V مجموعة مفتوحة في Y، وتحوي f(a)، فحينئذ ثمة مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن U محتواة في $f^{-1}V$، و $a \in U$.

ويقال إن $f:X \longrightarrow Y$ راسم مستمر إذا كانت $f^{-1}V$ مفتوحة في X كلما كانت V مفتوحة في Y.

من الجلي إذن، أنه كي يكون $f:X \longrightarrow Y$ مستمراً، فيلزم ويكفي أن يكون f مستمراً عند كل نقطة في X.

٢,٠٥ **نظرية.** (i) إذا كان X فضاء تبولوجيا، فحينئذ $id:X \longrightarrow X$ راسم مستمر.

(ii) إذا كانت XوYوZ فضاءات تبولوجية، و $f:X \longrightarrow Y$، و $g:Y \longrightarrow Z$ راسمين مستمرين، فحينئذ gof راسم مستمر.

البرهان. (i) مباشر من التعاريف.

(ii) لنفرض أن W مجموعة مفتوحة في Z. بما أن g راسم مستمر، فإن $g^{-1}W$ مفتوحة في Y. استناداً على استمرار f، فإن $(gof)^{-1}W = f^{-1}(g^{-1}W)$ مفتوحة في X. من ثم، فإن gof راسم مستمر. □

الآن نقدم مفهوماً أساسياً في التبولوجيا، هو مفهوم التكافؤ التبولوجي، والذي يحدد الخواص التي يعنى بدراستها التبولوجيون.

تعريف. إذا كان f راسماً من فضاء تبولوجي X إلى فضاء تبولوجي Y، فيقال إن f **تكافؤ تبولوجي**[١] إذا استوفى الشرطين التاليين:

(i) $f:X \rightarrow Y$ تقابل، وراسم مستمر.

---

(١) Homeomorphism

$f^{-1}: Y \rightarrow X$ (ii) راسم مستمر.

وإذا كان هنالك تكافؤ تبولوجي من X إلى Y، فيقال إن X **مكافىء تبولوجيا**[١] لـ Y، ويرمز لذلك بالصورة $X \cong Y$.

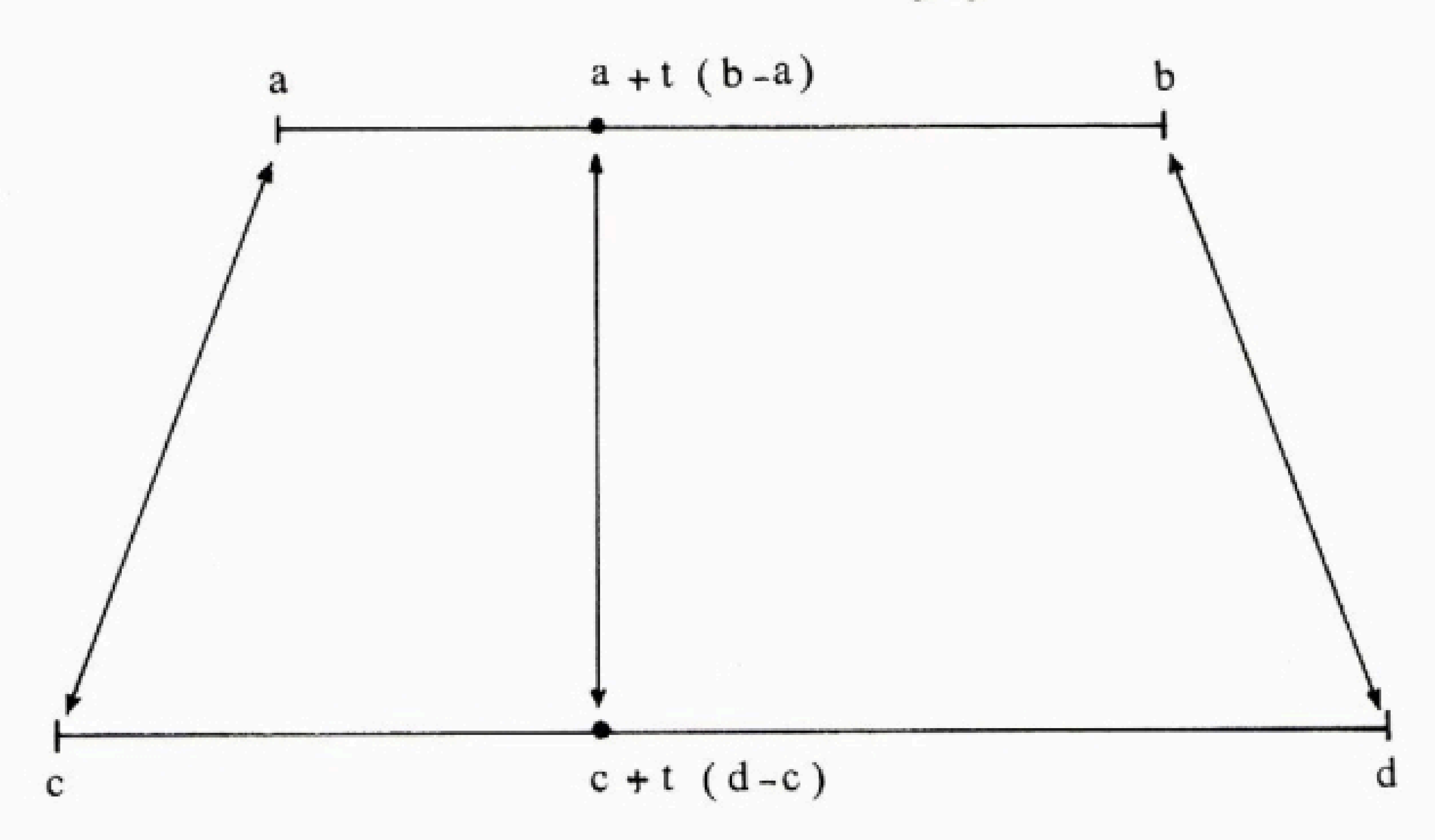
٢,٠٦ مثال. لتكن [a,b] و [c,d] فترتين مغلقتين في R ($a < b$، و $c < d$). حينئذ يكون

$$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

$$[a,b] \ni x \ \forall,\ f(x) = c + \frac{(x-a)}{b-a}\ .(d-c)$$

تكافؤاً تبولوجيا، نطلق عليه اسم **التكافؤ التبولوجي الطبيعي**[٢]. أما f^{-1} فهو معرف على النحو التالي:

$$[c,d] \ni y \ \forall\ ,\ f^{-1}(y) = a + \frac{(y-c)}{d-c}\ .(b-a)$$



الشكل (٢,٠١) : تكافؤ الفترتين المغلقتين.

٢,٠٧ مثال. ليكن A محيط المربع ذي الأركان $(o,\pm1)$ و$(\pm1,0)$ في R^2، حينئذ A مكافىء تبولوجيا لـ S^1 لأنه إذا كانت $p \ni A$، وأخذنا $f(p)$ = نقطة تقاطع S^1 مع امتداد جزء المستقيم من نقطة الأصل إلى p (الشكل٢,٠٢)، فإن $f : A \rightarrow S^1$ تكافؤ تبولوجي.

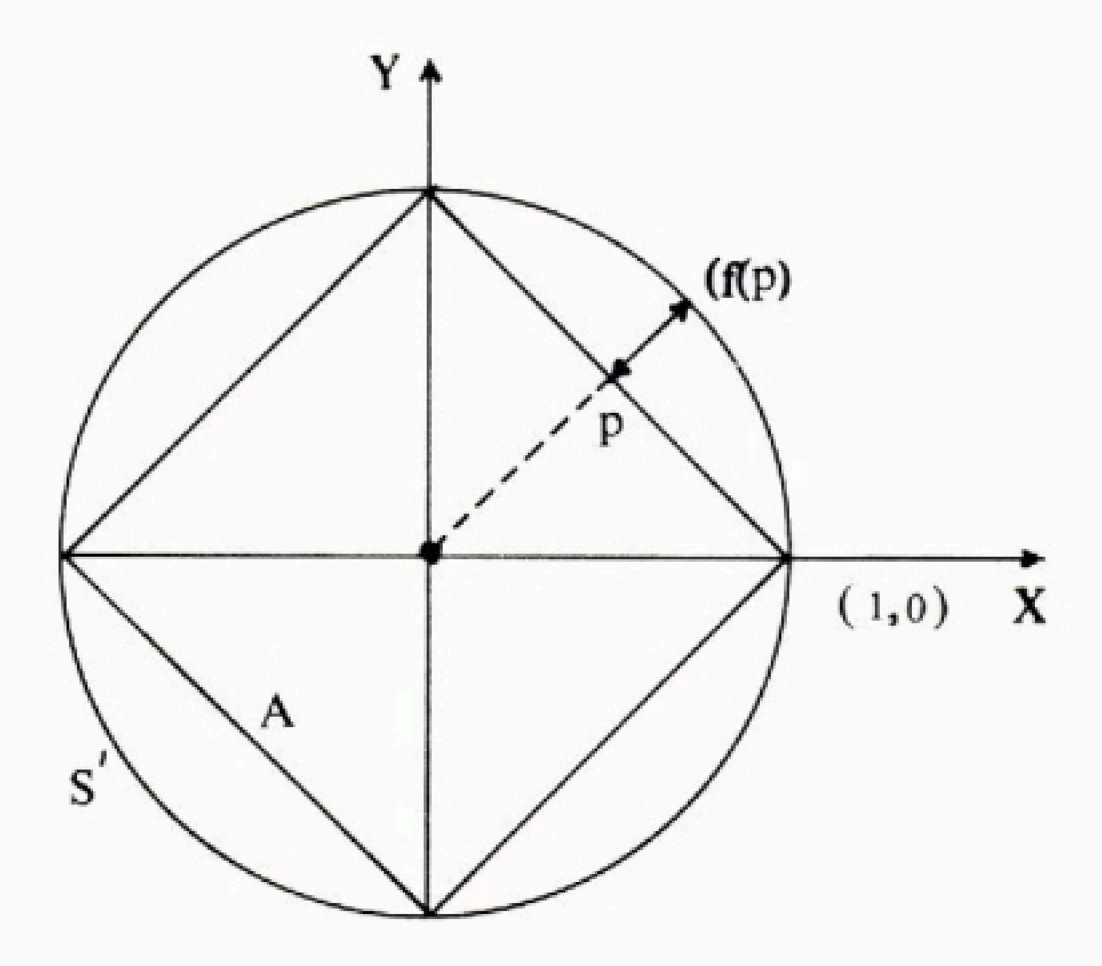
كي نتثبت من استمرار f ومعكوسه، فلنلاحظ أن f معطى تحليلياً كما يلي:

$$,A \ni (x,y) \ \forall\ ,\ f(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\ ,\ \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)$$

---

(١) Homeomorphic

(٢) The natural homeomorphism



الشكل (٢.٠٢) : تكافؤ المربع والدائرة.

أما معكوسه فهو الراسم:

$$f^{-1}(h,k) = \left(\frac{h}{|h| + |k|} \, , \, \frac{k}{|h| + |k|} \right) , \forall (h,k) \in S^1 .$$

٢,٠٨ **مثال**. الحلقة $X = \{ (x,y): 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \}$ مكافئة تبولوجيا للأسطوانة:
$Y = \{ (x,y,z): x^2+y^2 = 1 , 0 \leq z \leq 1 \}$.

ذلك أننا إذا وضعنا الدائرة الداخلية a لـ X لتتطابق مع قاعدة الأسطوانة 'a، ثم «أحطنا» Y بـ X، وأجرينا الانكماش المناسب، حتى تتطابق الدائرتان b وb' (انظر الشكل ٢,٠٣)، كان لدينا تكافؤ تبولوجي f من X إلى Y. إذا ابتغينا صيغة تحليلية لـ f فهي:

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{r} , \frac{y}{r} , r-1 \right)$$

حيث $r = (x^2+y^2)^{1/2} , \forall (x,y) \in X$.

(نترك للطالب مهمة إيجاد f^{-1}).

ملاحظة

تُعرّف ≅ علاقة تكافؤ على مجموعة الفضاءات التبولوجية، والمسألة الأساسية، من وجهة النظر التبولوجية، هي تصنيف الفضاءات التبولوجية، وفق هذه العلاقة. وفي هذا الشأن، أثبت ماركوف[١]

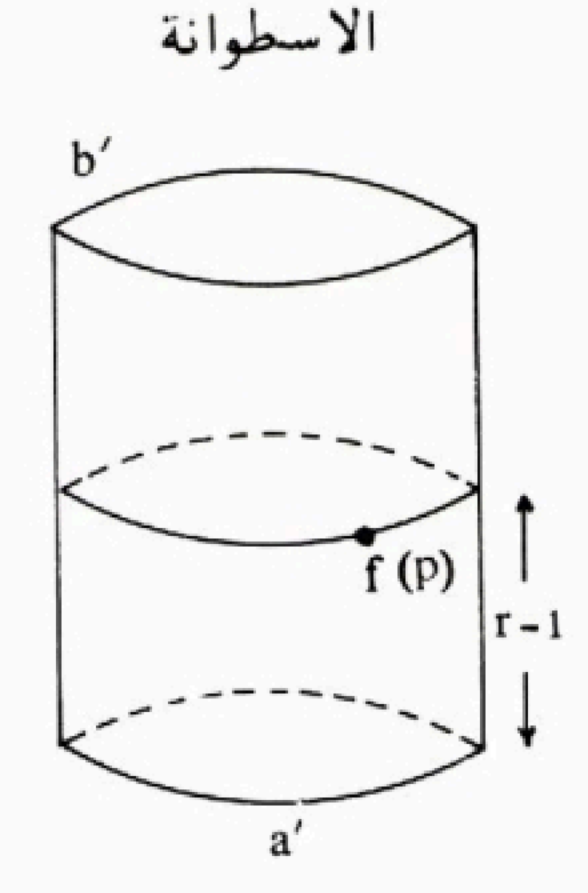
---

(١) Markov

الحلقة

a O r p b

الاسطوانة



الشكل (٢،٠٣) : تكافؤ الحلقة والأسطوانة.

(١٩٥٨م) أن ليس بالإمكان ابتداع أسلوب عام يمكن تطبيقه على أي زوج (X,Y)، يختار كيفياً، لتقرير ما إذا كان X مكافئاً تبولوجياً لـ Y.

بيد أنه قد تم تطوير أساليب وأدوات أسهمت في تقرير العديد من الحالات الخاصة. فباستخدام الزمرة الأساسية مثلاً، والتي نقدمها في الفصل التاسع، فبالإمكان إثبات أن $\mathbf{R}^n$ غير مكافىء تبولوجيا لـ $\mathbf{R}^2$, $n \neq 2$, وأن $\mathbf{D}^2$ غير مكافىء تبولوجيا للحلقة. وفي الحقيقة، فقد لعبت التبولوجيا الجبرية، بصورة عامة، دوراً رئيسياً، بالنسبة لمسألة التصنيف.

٣ـ مفاهيم أولية

في هذا الشأن، نعرف المجموعة المغلقة، ولصاقة المجموعة، والنقاط الداخلية والحدية والمعزولة، ونقاط النهاية، ونمثل لهذه المفاهيم باعتبار مجموعة جزئية هامة من R، هي مجموعة كانتر[١].

تعريف. إذا كان X فضاء تبولوجيا، وF مجموعة جزئية من X، فيقال إن F **مغلقة**[٢] في الفضاء X إذا كانت متممتها $\mathbf{F}^c$ مفتوحة في X.

٢،٠٩ **نظرية.** إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X، وإذا كانت F مجموعة المجموعات المغلقة في X، فحينئذ:

(i) ϕ و $X \in F$.

---

(١) the cantor set

(٢) closed

(ii) $\mathcal{F}$ مغلقة بالنسبة للاتحاد المنتهي.
(iii) $\mathcal{F}$ مغلقة بالنسبة للتقاطع الكيفي.

البرهان. (i) بما أن $X = \phi^c$، و$X^c = \phi$، إذن كل من ϕوX مغلقة في الفضاء X.

(ii) ليكن n عدداً طبيعياً، و$F_1,...,F_n \in \mathcal{F}$. إذن $U_i = F_i^c$ مجموعة مفتوحة في X، $1 \leq i \leq n$، ومن ثم فإن $\bigcup_1^n U_i$ مجموعة مفتوحة في X. الآن

$$(\bigcup_1^n F_i)^c = X - \bigcup_1^n F_i$$

$$= \bigcap_1^n (X - F_i)$$

$$= \bigcap_1^n U_i$$

مما يترتب عليه أن $\bigcup_1^n F_i \in \mathcal{F}$.

(iii) لتكن K مجموعة ما، و$F_k \in \mathcal{F}$، $\forall k \in K$. إذن $U_k = F_k^c$ مجموعة مفتوحة في X، $\forall k \in K$، ومن ثم، فإن $\bigcup_K U_k$ مجموعة مفتوحة في X. بما أن:

$$(\bigcap_K F_k)^c = X - \bigcap_K F_k$$

$$= \bigcup_K (X - F_k)$$

$$= \bigcup_K U_k$$

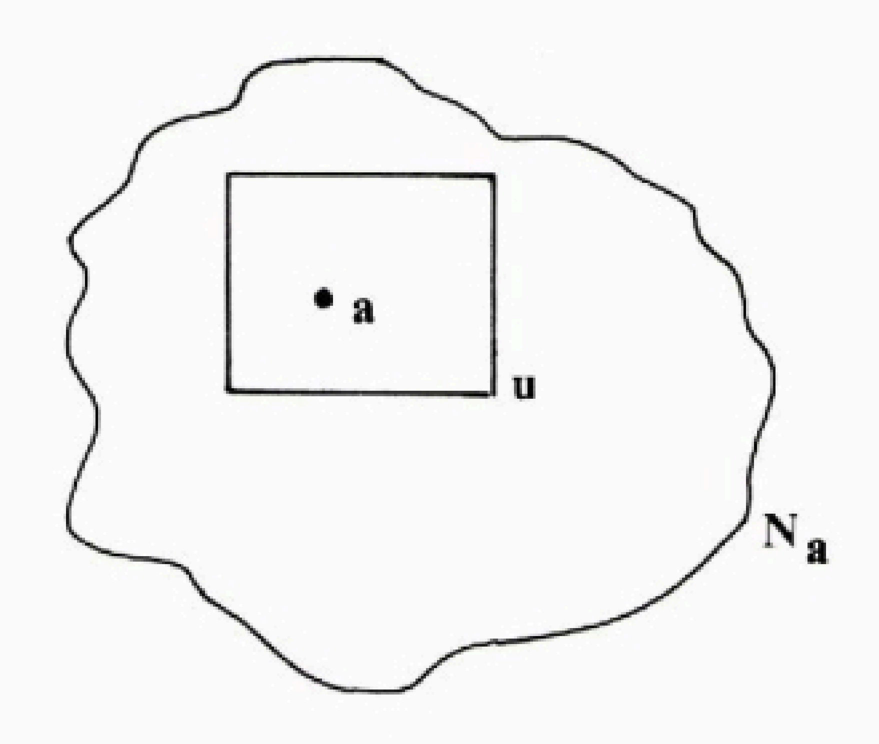
فحينئذ $\bigcap_K F_k \in \mathcal{F}$ □

لنلاحظ أن اتحاد عدد لا نهائي من المجموعات المغلقة في الفضاء لا يلزم أن يكون مجموعة مغلقة. فلنأخذ، على سبيل المثال، $F_n = \left[\frac{1}{n},1\right]$، $n \in N$، في الفضاء R. من الجلي أن F_n مغلقة في R، $\forall n \in N$، بيد أن $\bigcup_N F_n = [0,1]$ ليس مغلقاً في R.

إذا كانت لدينا مجموعة جزئية A من فضاء تبولوجي، فأصغر مجموعة مغلقة تحوي A تسمى لصاقة A. سوف نتعرض لهذا المفهوم فيما يلي.

تعريف. (i) إذا كان X فضاء تبولوجيا، وa نقطة في X، وN_a مجموعة جزئية من X تحوي a، فيقال إن N_a جوار[١] لـ a إذا كانت هنالك مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن (i) U تحوي a و(ii) U محتواة في N_a.

(١) Neighbourhood



الشكل (٢،٠٤) : N_a جوار لـ a.

إذا كان N_a جواراً لـ a بحيث أن N_a مفتوحة (مغلقة) في X، فيقال إن N_a جوار **مفتوح (مغلق)** لـ a.

(ii) إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X، ومجموعة جزئية A من X، **فلصاقة**[1] A، ويرمز لها بـ $\bar{A}$، هي المجموعة المشكلة من كل النقاط x في X التي تستوفي الشرط التالي:

كل جوار مفتوح N_x لـ x يقاطع A.

٢،١٠ **مثال**. إذا أخذنا $A = \{\frac{1}{n}: n \in N\}$، فإن $\bar{A} = A \cup \{0\}$ في الفضاء المعتاد R. أما في الفضاء اللامتقطع R، فإن $\bar{A} = R$ إذ أن هنالك مجموعة وحيدة مفتوحة وغير خالية في هذا الفضاء وهي R.

٢،١١ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا، وA مجموعة جزئية من X، و $\{F_j : j \in J\}$ مجموعة المجموعات التي تحوي A وتكون مغلقة في X، فحينئذ $\bar{A} = \bigcap_J F_j$.

البرهان.

أولاً: لنفرض أن $x \in \bar{A}$. لنفرض جدلاً أن ثمة $j_0 \in J$ بحيث أن $x \notin F_{j_0}$. إذن $F_{j_0}^c$ جوار مفتوح لـ x، ولا يقاطع A، مما يتناقض مع تعريف $\bar{A}$. من ثم، فإن $x \in F_j, \forall j \in J$، أي أن $x \in \bigcap_J F_j$. إذن $\bar{A}$ محتواة في $\bigcap_J F_j$.

ثانياً: نفرض أن $x \in \bigcap_J F_j$. لنفرض جدلاً أنه يوجد جوار مفتوح N_x لـ x لا يقاطع A. يترتب على ذلك أن N_x^c مجموعة مغلقة تحوي A، مما يستلزم أن $x \in N_x^c$. لكننا افترضنا أن N_x جوار لـ x. إزاء هذا التناقض، نستنتج أن N_x لا بد أن تقاطع A، ومن ثم فإن $x \in \bar{A}$. إذن $\bigcap_J F_j$ محتوى في $\bar{A}$.

من ثم، فإن $\bar{A} = \bigcap_J F_j$. □

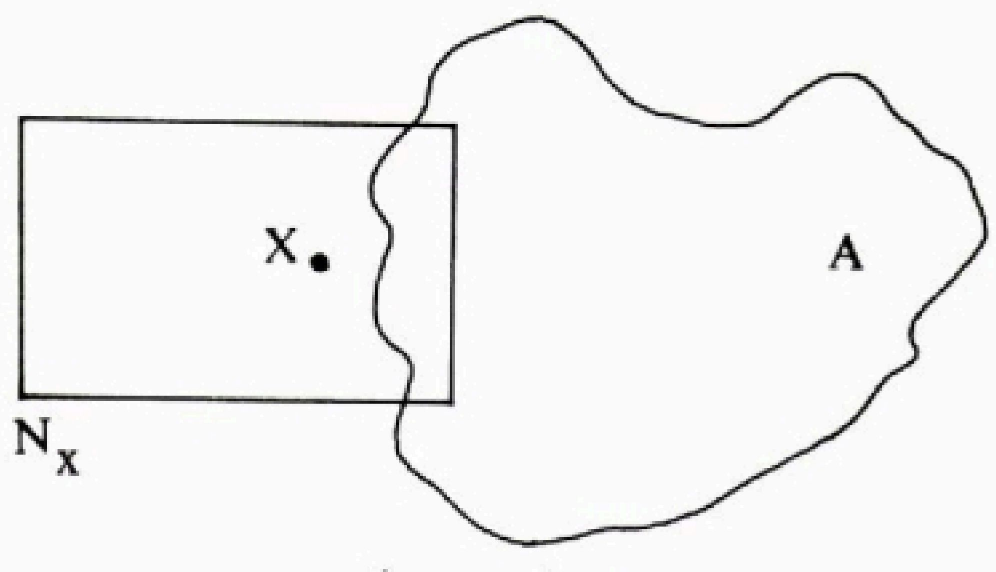
في ضوء النظرية السابقة، يتبين أن لصاقة A هي أصغر مجموعة مغلقة في الفضاء تحوي A.

---

(١) Closure

ثمة وصف آخر للصاقة A باستخدام لغة نقاط النهاية:

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فيقال أن $x \in X$ نقطة نهاية[١] لـ A إذا كان كل جوار N_x لـ X يقاطع $A - \{x\}$.



الشكل (٢,٠٥) : نقطة النهاية.

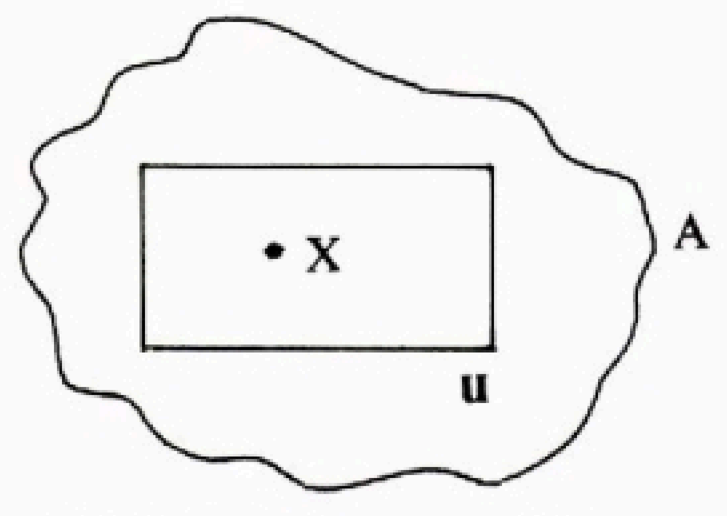
من السهل الآن، التحقق من أن لصاقة A هي اتحاد A مع مجموعة نقاط النهاية لـ A.

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فحدُّ A[٢]، ويرمز له بالرمز ∂A، هو تقاطع لصاقة A مع لصاقة متممة A. ويطلق على نقاط ∂A اسم النقاط الحدية[٣] لـ A.

٢,١٢ **مثال.** لنأخذ $A = U^n$، قرص الوحدة المفتوح في الفضاء الأقليدي R^n. حينئذ فإن $\overline{U^n} = D^n$، قرص الوحدة المغلق في R^n، وكل نقطة في D^n هي نقطة نهاية لـ U^n. أما ∂U^n فيساوي الكره S^{n-1}.

ننتقل الآن لأكبر مجموعة جزئية من A تكون مفتوحة في الفضاء X، وتسمى داخل A:

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فيقال أن $x \in A$ نقطة داخلية[٤] لـ A إذا كانت A جواراً لـ x. **داخل A**[٥]، ويرمز له بـ A^o، هو مجموعة النقاط الداخلية لـ A.



الشكل ٢,٠٦: النقطة الداخلية.

---

(١) Limit point

(٢) The boundary of A

(٣) Boundary points

(٤) Interior point

(٥) Interior of A

ندع للطالب إقامة البرهان على النظرية التالية.

٢,١٣ نظرية. إذا كان X فضاء تبولوجيا، وA مجموعة جزئية من X، حينئذ فإن داخل A يتساوى مع اتحاد المجموعات الجزئية من A المفتوحة في X.

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فالنقطة $a \in A$ **نقطة معزولة**[١] لـ A، إذا كان هنالك جوار مفتوح N_a لـ a بحيث يقاطع A في a فقط.

نخصص ما تبقى من هذا الجزء لتعريف مجموعة كانتر C، وإيجاد نقاط النهاية، والنقاط الداخلية والحدية والمعزولة لها. وفي الفصل القادم، نورد تمثيلاً آخر لـ C، يمهد الطريق لإنشاء راسم مستمر وغامر من I إلى المربع I^2، يدعى منحنى بينو[٢].

تعريف. لتكن F_1 الفترة المغلقة I. نقسم F_1 إلى ثلاثة أجزاء متساوية، ثم نحذف الفترة المتوسطة $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. ونسمي الناتج F_2: أي أن

$$F_2 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$$

الآن نقسم كلا من الفترتين $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ و $\left[\frac{2}{3},1\right]$ إلى ثلاثة أجزاء متساوية، ونحذف الفترة المتوسطة المفتوحة من كل منها، ونسمي ما يتبقى F_3: أي أننا نعرف:

$$F_3 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$$

إذ نسير على هذا المنوال، نعرف $F_n, \forall n \in N$. ونعرف مجموعة كانتر[٣] C بأنها تقاطع المجموعات

$$C = \bigcap_{1}^{\infty} F_n$$

لنلاحظ النقاط التالية:

(أ) C مجموعة مغلقة، لأنها تقاطع المجموعات F_n المغلقة في الفضاء المعتاد R.

(ب) حدُ $F_1 = \{0,1\}$، وحد $F_2 = \left\{1 و \frac{2}{3} و \frac{1}{3} و 0\right\}$،

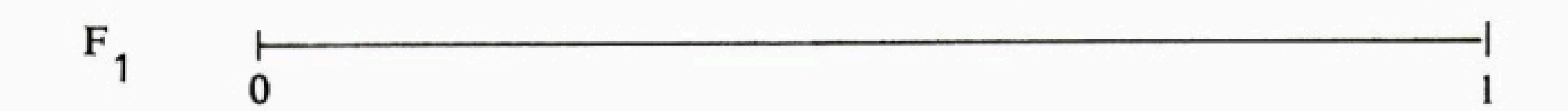
وحد $F_3 = \left\{1 و \frac{8}{9} و \frac{7}{9} و \frac{2}{3} و \frac{1}{3} و \frac{2}{9} و \frac{1}{9} و 0\right\}$ وهكذا.

---

(١) Isolated point

(٢) Peano Curve

(٣) The Cantor set







الشكل (٢,٠٧) : إنشاء مجموعة كانتر.

(ج) إذا كانت x نقطة حدية لـ F_n، فحينئذ تكون x نقطة حدية لـ F_m, $n \le m$، ومن ثم، فإن $x \in C$. علاوة على ذلك، إذا كانت x نقطة حدية لـ F_n، فهنالك نقطة حدية أخرى على مسافة $\frac{1}{3^{n-1}}$. من ثم، توجد نقطتان x و$y \in C$ بحيث أن

$$|x - y| = \frac{1}{3^{n-1}}$$

(د) جميع نقاط C نقاط حدية. لإثبات ذلك، نأخذ $x \in C$، و$\xi > 0$. من ثم، يوجد عدد طبيعي n بحيث أن $\frac{1}{3^{n-1}} < \xi$. لتكن a_n وb_n نقطتين حديتين لـ F_n بحيث أن: $b_n - a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ و$x \in [a_n, b_n]$. إذن $B(x;\xi)$ يقاطع C، ويقاطع متممة C. (لأن a_n نقطة حدية لـ F_n)، مما يستلزم أن $B(x;\xi)$ يقاطع متممة F_n. من ثم، فإن x تنتمي إلى C ولصاقة متممة C، أي أنها نقطة حدية لـ C.

تمارين (٢)

الجزء الأول

١ ـ أوجد كل التبولوجيات على المجموعة $\{1, 2, 3\}$.

٢ ـ أثبت أن فضاء المتممة المنتهية على مجموعة X يكون هاوسدوف إذا وإذا فقط كانت X مجموعة منتهية.

٣ ـ لتكن $\mathcal{U}$ جماعة المجموعات الجزئية التالية من I: $U \ni \mathcal{U}$ إذا كانت $U = \phi$ أو متممة U قابلة للعد. أثبت أن $\mathcal{U}$ تبولوجيا على I.

٤ ـ برهن أن تقاطع أي عدد من التبولوجيات على مجموعة غير خالية X يشكل تبولوجيا على X

الجزء الثاني

٥ ـ بين أن الفضاءين X وY متكافئان، في كل من الحالات التالية:

(i) $X = R$, $Y = (0, \infty)$

(ii) $X = U^n$, $Y = R^n$

(iii) $X = R^n$, $Y = S^n - \{a\}$، حيث a أي نقطة في S^n.

(iv) X مضلع دائري، و$Y = S^1$.

(افترض التبولوجيا المعتادة في كل حالة).

٦ ـ أثبت أن $S^1 \cup \{(0,0)\}$ مكافىء تبولوجيا لـ $S^1 \cup \{(2,0)\}$. هل بالإمكان تحويل الشكل الأول إلى الثاني بإجراء تشويه مستمر؟

٧ ـ برهن أن الدائرة $x^2+y^2 = 4$ مكافئة تبولوجيا لـ S^1، بيد أنها غير مكافئة مترياً لـ S^1.

٨ ـ برهن الاستنتاج التالي من نظرية القيمة الوسطى: إذا كانت f دالة مستمرة وآحادية على فترة من R، فحينئذ تكون f تزايدية تماماً أو تناقصية تماماً.

من ثم، بين أن الفضاءات المعتادة $(0,1)$، و$[0,1)$، و$[0,1]$ تمثل فصول تكافؤ تبولوجي مختلفة.

الجزء الثالث.

٩ ـ أثبت أنه إذا كان X وY فضاءين تبولوجيين، فحينئذ $f: X \to Y$ راسم مستمر إذا وإذا فقط كانت $f^{-1}G$ مغلقة في X كلما كانت G مغلقة في Y.

١٠ـ أوجد $\bar{A}$, A^{o}، و∂A في R^2 لكل من المجموعات التالية:

(i) A = النصف العلوي من $R^2 = \{(x,y): y \geq 0\}$

(ii) A = محور x

(iii) $A = R^2 - S^1$

(iv) $A = \{(x,y): x$ و $y \in Q\}$

١١ـ أثبت أن $A = \bar{A} = A^{o}$ في الفضاء المتقطع، وأن $\partial A = \phi$.

١٢ـ لتكن A وB مجموعتين من فضاء تبولوجي X. بين أن:

(i) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

(ii) $A^{o} \cap B^{o} = (A \cap B)^{o}$

(iii) $\bar{A} \cap \bar{B} \supset \overline{A \cap B}$

(iv) $A^{o} \cup B^{o} \subset (A \cup B)^{o}$

هل يمكن استبدال العلامة $\supset$ أو $\subset$ بالعلامة = في (iii) أو (iv)؟

١٣ـ اثبت أن داخل مجموعة كانتر C يساوي ϕ .

(بين أن ∂Aلا يقاطع داخل A، لأي مجموعة A في فضاء تبولوجي).

١٤ـ (أ) بين أن كل مجموعة مفتوحة في R^n تكون اتحاداً لمستطيلات مفتوحة في R^n.

(إذا كانت $A = (a_1, b_1) X...X (a_n, b_n)$ ، فيقال عن A إنها مستطيل مفتوح في R^n).

(ب) برهن أن المجموعة Q^n تقاطع كل مجموعة مفتوحة في R^n.

١٥ـ ليكن X فضاء متريا وA مجموعة جزئية من X. أثبت أن لصاقة A تساوي X إذا وإذا فقط أياً كان القرص المفتوح $B(x;r)$ في X، فإن $B(x;r)$ يقاطع A.

الفصل الثالث

انشاء فضاءات جديدة

Construction of New Spaces

مقدمة

إذا أخذنا أي عدد من الفضاءات التبولوجية، فهنالك أساليب عديدة يمكن نهجها لاستحداث فضاءات جديدة منها. في هذا الفصل، نصف ثلاثة من هذه الأساليب فنبين كيف تنبثق الفضاءات الجزئية، وكيف نشيد فضاءات الجداء، وفضاءات المطابقة.

وكي نلقي بعض الضوء على أهمية فضاء الجداء، فسوف نقوم (في الجزء الثالث)، بتمثيل فضاء كانتر C، كفضاء جداء: $C \cong 2^N$، حيث ترمز 2 للفضاء المتقطع $\{0,2\}$، مما يتيح لنا الوصول إلى راسم مستمر، من الفترة I إلى المربع $I \times I = I^2$، بحيث يمر بكل نقطة في المربع. يدعى مثل هذا الراسم منحنى بينو[1]، نسبة إلى الرياضي بينو، الذي يرجع له الفضل في اكتشاف وجوده، في القرن الماضي، إبان اشتغاله بمسألة وضع تعريف لمفهوم المنحنى



الشكل (٣،١) : منحنى بينو

من ناحية أخرى، فإن فضاءات المطابقة بالغة الأهمية، وتبرز كثيراً في التبولوجيا، والتبولوجيا الجبرية. وعلى سبيل المثال، فإن تمثيل نوع خاص من السطوح - وهي السطوح المتصلة المتراصة -

---

(١) Peano

كفضاءات مطابقة تشكل من قرص الوحدة المغلق D^2، كان خطوة هامة في برهان نظرية شهيرة في التبولوجيا، وهي نظرية تصنيف السطوح المتصلة المتراصة ([11]).

١ ـ الفضاءات الجزئية

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية، من فضاء تبولوجي $(X,\mathcal{U})$، فإنها تكتسب تبولوجيا $\mathcal{U}_A$ من $(X,\mathcal{U})$، تُشكل عناصرها من تقاطع A مع المجموعات المفتوحة في X. يسمى الزوج $(A,\mathcal{U}_A)$ الفضاء الجزئي A.

تعريف. إذا كان لدينا فضاء تبولوجي $(X,\mathcal{U})$، ومجموعة جزئية غير خالية A من X، فالتبولوجيا النسبية[١] $\mathcal{U}_A$، على المجموعة A، هي المجموعة:

$$\mathcal{U}_A = \left\{ V : V = A \cap U \text{ ، } U \in \mathcal{U} \right\}$$

والفضاء الجزئي[٢] A هو الفضاء التبولوجي $(A,\mathcal{U}_A)$.

بالطبع علينا أن نتحقق من أن $\mathcal{U}_A$ تستوفي شروط التبولوجيا:

ت ١: بما أن $A \cap \phi = \phi$ ، و $A \cap X = A$، فإن ϕ و $A \in \mathcal{U}_A$.

ت ٢: إذا كانت J مجموعة ما، و $U_j \in \mathcal{U}, \forall j \in J$، حينئذ $A \cap (\bigcup_j U_j) = \bigcup_j A \cap U_j$. بما أن $\bigcup_j U_j \in \mathcal{U}$ (تعريف التبولوجيا)، إذن $\bigcup_j A \cap U_j \in \mathcal{U}_A$، مما يبين أن $\mathcal{U}_A$ مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي.

ت ٣: إذا كانت $n \in N$، و $U_j \in \mathcal{U}, 1 \le j \le n$، حينئذ $\bigcap_1^n (A \cap U_i) = A \cap (\bigcap_1^n U_i) \in \mathcal{U}_A$، لأن $\bigcap_1^n U_i \in \mathcal{U}$. من ثم، فإن $\mathcal{U}_A$ مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي. إذن $\mathcal{U}_A$ تبولوجيا على A.

لنلاحظ أنه كي تكون F مجموعة مغلقة في فضاء جزئي A من فضاء. تبولوجي X، فيلزم ويكفي أن تكون هنالك مجموعة F_1 مغلقة في الفضاء X بحيث أن $F = A \cap F_1$.

نترك إقامة البرهان للطالب.

٣,١ مثال. إذا كان X فضاء تبولوجيا متقطعاً، فإن كل فضاء جزئي منه يكون متقطعاً أيضاً.

فيما يلي، نورد نظرية مفيدة للغاية، تحيل مهمة إثبات استمرار راسم معطى: $f: X \to Y$، إلى مهمة التثبت من الاستمرار على عدد منته من الفضاءات الجزئية المغلقة.

---

(١) The relative topology

(٢) The subspace

تعريف. إذا كان A فضاء جزئياً من فضاء تبولوجي X، فيقال إن A **فضاء جزئي مفتوح**[١] **(مغلق**[٢]**)** من X، إذا كانت المجموعة A مفتوحة (مغلقة) في X.

٣,٢ **نظرية (نظرية الالصاق**[٣]**)**. ليكن f راسماً من فضاء تبولوجي X إلى فضاء تبولوجي Y. ليكن كل من A و B فضاء جزئياً مغلقاً في X بحيث أن $X=A \cup B$، و $f|A$ و $f|B$ راسمان مستمران. حينئذ $f:X \to Y$ راسم مستمر.

البرهان. لإثبات استمرار $f:X \to Y$، فيكفي أن نبين أن $f^{-1}G$ تكون مغلقة في X كلما كانت G مغلقة في Y (تمارين (٢):م.٩). بما أن $X = A \cup B$، فتكون لدينا المتطابقة التالية:

$$f^{-1}G = (f|A)^{-1}G \cup (f|B)^{-1}G$$

الآن $f|A$ راسم مستمر، مما يترتب عليه أن $(f|A)^{-1}G$ مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي A. هذا يستلزم أنه توجد مجموعة مغلقة F_1 في X بحيث أن $(f|A)^{-1}G=A \cap F_1$. بحجة مشابهة، فثمة مجموعة مغلقة F_2 في X بحيث أن:

$$(f|B)^{-1}G = B \cap F_2$$

من ثم، فإن:

$$f^{-1}G=(A \cap F_1) \cup (B \cap F_2)$$

ولذا فهي مغلقة في X (A و B مغلقتان في X). □

٢ ـ فضاءات الجداء

في هذا الشأن، نفرض أن لدينا فضاءً تبولوجيا X_j، لكل j تنتمي إلى عائلة مرقمة J، وننشد الإجابة على السؤال التالي: كيف ننشيء تبولوجيا على الجداء الديكارتي $\pi_J X_j$، بحيث تعكس، إلى أكبر حد ممكن، الخواص التبولوجية المشتركة للفضاءات X_j؟

لنقصر حديثنا أولاً على الجداءات المنتهية، فلعل ذلك يؤدي إلى فهم أفضل للموضوع.

---

(١) Open subspace

(٢) Closed subspace

(٣) The pasting theorem

(أ) **الجداءات المنتهية**: في هذه الحالة، نفترض أن $J = \{1,...,n\}$ حيث $n \in N$. إننا إذا وقفنا قليلاً عند الفضاء الاقليدي R^n ، نجد أن المجموعة R^n هي الجداء الديكارتي $R\times...\times R$ (n مرة)، أما المجموعات المفتوحة في R^n فهي اتحادات المستطيلات المفتوحة $(a_1,b_1)\times...\times(a_n,b_n)$، حيث (a_i,b_i) فترة مفتوحة في R، $1\leq i\leq n$ (تمارين (١):م١٤٠). من ثم، فالشرط اللازم والكافي كي تكون U مجموعة مفتوحة في R^n هو وجود تمثيل لها كإتحاد مجموعات من النوع: $U_1\times...\times U_n$، حيث U_i مجموعة مفتوحة في R ، $1\leq i\leq n$. من هذا المنطلق، نضع التعريف التالي لفضاء الجداء:

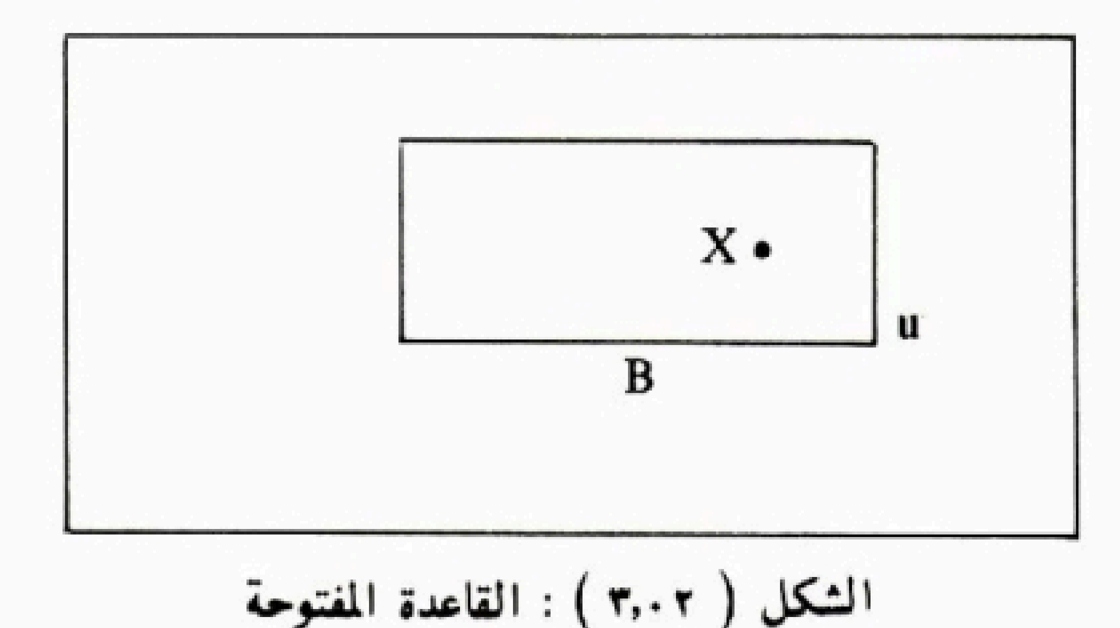
تعريف. ليكن X_j فضاء تبولوجيا، $1\leq j\leq n$. لتكن B_0 المجموعة المشكلة من: $U_1\times...\times U_n$: U_j مفتوحة في X_j, $1\leq j\leq n$. حينئذ **تبولوجيا الجداء**[1] U على $\overset{n}{\underset{1}{\pi}}X_j$ هي المجموعة المشكلة من كل الاتحادات الكيفية لعناصر B_0، أي أنه إذا كانت $B_0=\{B_k : k\in K\}$ فحينئذ $U=\{\underset{L}{\cup}B_l : L\subset K\}$. يطلق على الفضاء $(\overset{n}{\underset{1}{\pi}}X_j, U)$ اسم **فضاء الجداء**[2] $\overset{n}{\underset{1}{\pi}}X_j$.

علينا بالطبع أن نتحقق من أن U تستوفي شروط التبولوجيا، ولعله من المفيد أن نبحث هذا الموضوع داخل إطار أعم، وذلك بتقديم مفهوم القاعدة المفتوحة.

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا، ولتكن B مجموعة من المجموعات المفتوحة في X بحيث أن كل مجموعة مفتوحة في X اتحاد لعناصر من B. حينئذ يقال إن B **قاعدة مفتوحة**[3] لـ X.

من الجلي، إذن، أنه إذا كانت B مجموعة من المجموعات المفتوحة في X، فلكي تكون B قاعدة مفتوحة لـ X، فإنه يلزم ويكفي أن تحقق الشرط التالي:

إذا كانت U مجموعة مفتوحة في X، وإذا كانت $x \in U$ فثمة جوار B لـ x بحيث أن $B\in B$، و B محتوي في U (الشكل ٣,٠٢).



الشكل (٣,٠٢) : القاعدة المفتوحة

---

(١) The product topology

(٢) The product space

(٣) Open base

نترك للطالب، مهمة إثبات الدعوى السابقة.

٣,٣ مثال. إذا أخذنا فضاء تبولوجيا متقطعاً X، فحينئذ تشكل مجموعة المجموعات وحيدة العنصر: $\{x\}$, $x \in X$، قاعدة مفتوحة لـ X. علاوة على ذلك، فهذه أصغر قاعدة مفتوحة لـ X.

٣,٤ مثال.

$$B = \{ (r_1,q_1) \times (r_2,q_2) : r_1, r_2, q_1, q_2 \in Q \}$$

قاعدة مفتوحة لـ R^2.

نعالج الآن النقطة التالية: إذا كانت لدينا مجموعة غير خالية X ومجموعة B من المجموعات الجزئية من X، فمتى تكون B مؤهلة لتشكيل قاعدة مفتوحة لتبولوجيا على X؟

تعريف. لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن $B = \{B_k : k \in K\}$ مجموعة من المجموعات الجزئية من X بحيث أن:

(i) $X = \underset{K}{\cup} B_k$

(ii) تقاطع أي عنصرين من B يكون اتحادا لعناصر من B: أي أنه إذا كانت B_1 و $B_2 \in B$، فثمة مجموعة L محتواة في K بحيث أن

$$B_1 \cap B_2 = \underset{L}{\cup} B_L$$

حينئذ يقال إن B قاعدة مولدة(١) لتبولوجيا على X.

٣,٥ نظرية. إذا كانت B قاعدة مولدة لتبولوجيا على مجموعة X، فحينئذ تشكل المجموعة U للاتحادات الكيفية لعناصر B تبولوجيا على X. علاوة على ذلك، فإن B تشكل قاعدة مفتوحة لـ U.

(تسمى U التبولوجيا المولدة بالقاعدة B(٢)).

البرهان

(i) بما أن ϕ هي اتحاد عناصر المجموعة الجزئية الخالية من B، فإن $\phi \in U$، واستناداً على تعريف B، فإن $X \in U$.

(ii) U مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي: لأنه إذا كانت K عائلة مرقمة لـ B، وكانت $\underset{L_s}{\cup} B_l = U_s$، حيث L_s مجموعة جزئية من K، لكل s في مجموعة S، فحينئذ:

---

(١) Generating base

(٢) The topology generated by the base B

$$\bigcup_S U_s = \bigcup_S \left(\bigcup_{L_s} B_\ell \right) = \bigcup_L B_\ell$$

حيث $\bigcup_S L_s = L$. إذن $\bigcup_S U_s \in U$

(iii) U مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي: لأنه إذا كانت $\bigcup_L B_l = U_1$ ، و $\bigcup_{l'} B_{l'} = U_2$، حيث L و 'L مجموعتان جزئيتان من K ، فحينئذ:

$$U_1 \cap U_2 = (\bigcup_L B_\ell) \cap (\bigcup_{L'} B_{\ell'}) = \bigcup_{\substack{\ell \in L \\ \ell' \in L'}} B_L \cap B_{\ell'}$$

فهي إذن اتحاد لعناصر من B، استناداً على تعريف B، والبند (ii).

إذن U تبولوجيا على X.

من الجلي أن B قاعدة مفتوحة لـ U. □

نعود الآن لتعريف فضاء الجداء. إذا أخذنا المجموعة $B_{//} = \{ U_1 \times \ldots \times U_n : U_j$ مفتوحة في X_j, $1 \le j \le n \}$ فنجد أنها مؤهلة لتوليد تبولوجيا على $\prod_1^n X_j$ لأن $X_1 \times \ldots \times X_n = X \in B_{//}$، ولأن $B_{//}$ مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي. من ثم، فتبولوجيا الجداء هي التبولوجيا المولدة بالقاعدة $B_{//}$.

باستخدام الاسقاطات الطبيعية $p_i : \prod_1^n X_i \to X_i$, $1 \le i \le n$ ، فإنه يتسنى لنا إعطاء الخاصة التالية المميزة لتبولوجيا الجداء، وهي:

تبولوجيا الجداء هي أصغر تبولوجيا على الجداء الديكارتي $\prod_1^n X_j$ تكفل استمرار كل الإسقاطات الطبيعية.

تعريف. إذا كانت كل من U_1 و U_2 تبولوجيا على مجموعة X فيقال إن U_1 أصغر من U_2 إذا كانت U_1 محتواة في U_2. وفي هذه الحالة، يقال إن U_2 أكبر من U_1.

٣,٦ **نظرية**. ليكن $\prod_1^n X_j$ فضاء جداء. حينئذ:

(i) الاسقاط الطبيعي:

$$p_i : \prod_1^n X_j \to X_i$$

راسم مستمر، $1 \le i \le n$.

(١) Smaller

(٢) Larger

(ii) إذا كانت U تبولوجيا على الجداء الديكارتي $\underset{n}{\overset{1}{\pi}} X_j$ ، بحيث أن:

$$p_i: \underset{1}{\overset{N}{\pi}} X_j \to X_i$$

راسم مستمر، $1 \leq i \leq n$ ، فإن تبولوجيا الجداء أصغر من U .

البرهان

(i) إذا كانت U_i مجموعة مفتوحة في X_i، حينئذ:

$$p_i^{-1}U_i = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$$

ومن ثم فهي مفتوحة في فضاء الجداء. إذن p_i راسم مستمر.

(ii) لتكن U_i مجموعة مفتوحة في X_i ، $1 \leqslant i \leqslant n$. بما أن $p_1,\ldots,p_n$ رواسم مستمرة بالنسبة لـ U، فيترتب على ذلك أن $p_1^{-1}U_1 \cap \ldots \cap p_n^{-1}U_n$ مجموعة مفتوحة في U. استناداً إلى المتطابقة:

$$p_1^{-1}U_1 \cap \ldots \cap p_n^{-1}U_n = U_1 \times \ldots \times U_n$$

فإن كل عنصر في القاعدة المولدة لتبولوجيا الجداء ينتمي إلى U. بما أن U مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي، فيترتب على ذلك أن U تحوي تبولوجيا الجداء. □

(ب) الحالة العامة: J مجموعة غير خالية.

في البدء، نذكر القارىء أن الجداء الديكارتي $\underset{J}{\pi} X_j$ للمجموعات X_j، $j \ni J$، هو مجموعة الرواسم:

$$x : J \to \underset{J}{\cup} X_j$$

بحيث أن $x(j) \ni X_j$، $\forall\, j \ni J$. في ضوء مسلمة الاختيار (انظر المتطلبات والدلالات)، فإن $\underset{J}{\pi} X_j$ مجموعة غير خالية. أما الإسقاط الطبيعي:

$$p_i: \underset{J}{\pi} X_j \to X_i$$

فهو الراسم

$$p_i(x) = x(i)\text{، } \forall\; x \ni \underset{J}{\pi} X_j \text{، و } \forall\; i \ni J\,.$$

في ضوء معالجتنا للجداءات المنتهية، وباعتبار نظرية ٣,٦ ، فمن الطبيعي تعريف فضاء الجداء في الحالة العامة، على النحو التالي:

تعريف. لتكن J مجموعة ما، وليكن X_j فضاء تبولوجيا، $\forall\, j \ni J$. حينئذ تبولوجيا الجداء على

المجموعة $\underset{J}{\pi} X_j$ هي التبولوجيا U المولدة بالقاعدة B_o، المشكلة من العناصر: $p_{j_1}^{-1} U_1 \cap ... \cap p_{j_n}^{-1} U_n$ حيث U_i مجموعة مفتوحة في X_{j_i}، $j_i \in J$، $1 \leq i \leq n$، $n \in N$.

وفضاء الجداء $\underset{J}{\pi} X_j$ هو الفضاء $(\underset{J}{\pi} \; X_j, U)$.

كي نتحقق من أن B_o قاعدة مولدة لتبولوجيا على $\underset{J}{\pi} X_j$ فلنلاحظ ما يلي:

(i) $p_j^{-1}X_j = \underset{J}{\pi} X_j$، $\forall \; j \in J$، فهي إذن تنتمي إلى B_o.

(ii) B_o مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

إن المنطق الذي سيق لإقامة البرهان على نظرية ٣,٦ ، يمكن الاسترشاد به لبرهان:

٣,٧ نظرية. تبولوجيا الجداء هي أصغر تبولوجيا على الجداء الديكارتي $\underset{J}{\pi} X_j$ تكفل استمرار كل الإسقاطات الطبيعية.

دلالة. إذا كان X فضاء تبولوجيا ، وJ مجموعة غيرخالية ، وعرفنا $X_j=X$، $\forall \; j \in J$، فنرمز حينئذ لفضاء الجداء $\underset{J}{\pi} \; X_j$ بالرمز X^J.

(بصفة خاصة ، إذا كانت N=J ، فالمجموعة X^N هي مجموعة المتواليات (x_n) في X).

فيما تبقى من هذا الجزء ، نتعرض لبعض الخواص الهامة لفضاء الجداء والإسقاطات الطبيعية. وتتعلق النظرية الأولى ، في هذا الصدد ، بمهمة التحقق من إستمرار راسم معطى $f:X \to \underset{J}{\pi} X_j$، فتحيل هذه المهمة إلى التثبت من إستمرار $p_i o f$ ، $\forall \; i \in J$، وهي ، في معظم الأحيان ، مهمة أسهل.

٣,٨ نظرية. ليكن $f:X \to \underset{J}{\pi} X_i$ راسماً من فضاء تبولوجي X إلى فضاء جداء $\underset{J}{\pi} X_j$. كي يكون f مستمراً ، فيلزم ويكفي أن يكون التركيب:

$$X \xrightarrow{f} \underset{J}{\pi} X_j \xrightarrow{p_i} X_i$$

مستمراً ، $\forall \; i \in J$.

البرهان. إذا كان f مستمراً ، فيترتب على نظريتي ٣,٧ و٢,٥ أن $p_i of$ مستمر ، $\forall \; i \in J$.

لنعتبر العكس الآن ، فنفرض أن $p_i of$ مستمر ، $\forall \; i \in J$. نأخذ مجموعة مفتوحة U في $\underset{J}{\pi} \; X_j$. إذا كانت $U=p_i^{-1}U_i$، حيث U_i مجموعة مفتوحة في X_i، لعنصر ما $i \in J$، فحينئذ:

$$f^{-1}U=f^{-1}(p_i^{-1}U_i)$$

$$= (p_i of)^{-1}U_i$$

بما أن $p_I o f$ راسم مستمر، فإن $f^{-1}U$ تكون مفتوحة في X.

استناداً على المتطابقة:

$$f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}A_1 \cap f^{-1}A_2$$

أيا كانت المجموعتان الجزئيتان A_1 و A_2 في النطاق المرافق لـ f، وفي ضوء الفقرة السابقة، فإنه يتضح أن $f^{-1}B$ مجموعة مفتوحة في X، لكل B في القاعدة $\mathcal{B}_o$ المولدة لتبولوجيا الجداء.

أخيراً، ووفق نظرية المجموعات، فإن:

$$f^{-1}(\bigcup_L B_\ell) = \bigcup_L f^{-1}B_\ell$$

أيا كانت المجموعة الجزئية $\{B_L : L \in L\}$ من $\mathcal{B}_o$.

استناداً على هذه المتطابقة وما سبق إثباته، فإن $f^{-1}U$ تكون مفتوحة في X كلما كانت U مفتوحة في $\prod_J X_j$. من ثم، فإن f راسم مستمر. □

أما النظرية الثانية فتتعلق بالإسقاطات الطبيعية، وتنص على أنها رواسم مفتوحة.

تعريف: إذا كان f راسماً من فضاء تبولوجي X إلى فضاء تبولوجي Y، فيقال إن f **راسم مفتوح**[١] (**مغلق**[٢]) إذا كانت $f(U)$ مفتوحة (مغلقة) في Y كلما كانت U مجموعة مفتوحة (مغلقة) في X.

٣,٩ نظرية: ليكن $\prod_J X_j$ فضاء جداء. حينئذ:

$$p_1 : \prod_J X_j \to X_I$$

راسم مفتوح، $\forall i \in J$.

البرهان. إذا أخذنا $B \in \mathcal{B}_o$، فهنالك $n \in N$، و $j_1,\dots,j_n \in J$، $j_j \neq j_k$، $1 \leq i < k \leq n$، ومجموعات U_1، ...، U_n بحيث أن:

$B = p_{j_1}^{-1} U_1 \cap \dots \cap p_{j_n}^{-1} U_n$ و U_k مجموعة مفتوحة في X_{j_k}، $1 \leq k \leq n$. الآن، إذا كانت $i \in \{j_1,\dots,j_n\}$، فحينئذ $U_k = p_1 B$، حيث $i = j_k$. أما إذا كانت $i \notin \{j_1,\dots,j_n\}$ فحينئذ $X_i = p_i B$. من ثم، فإن $p_i B$ مجموعة مفتوحة في: X_i، $\forall B \in \mathcal{B}_o$.

---

(١) Open Mapping

(٢) Closed Mapping

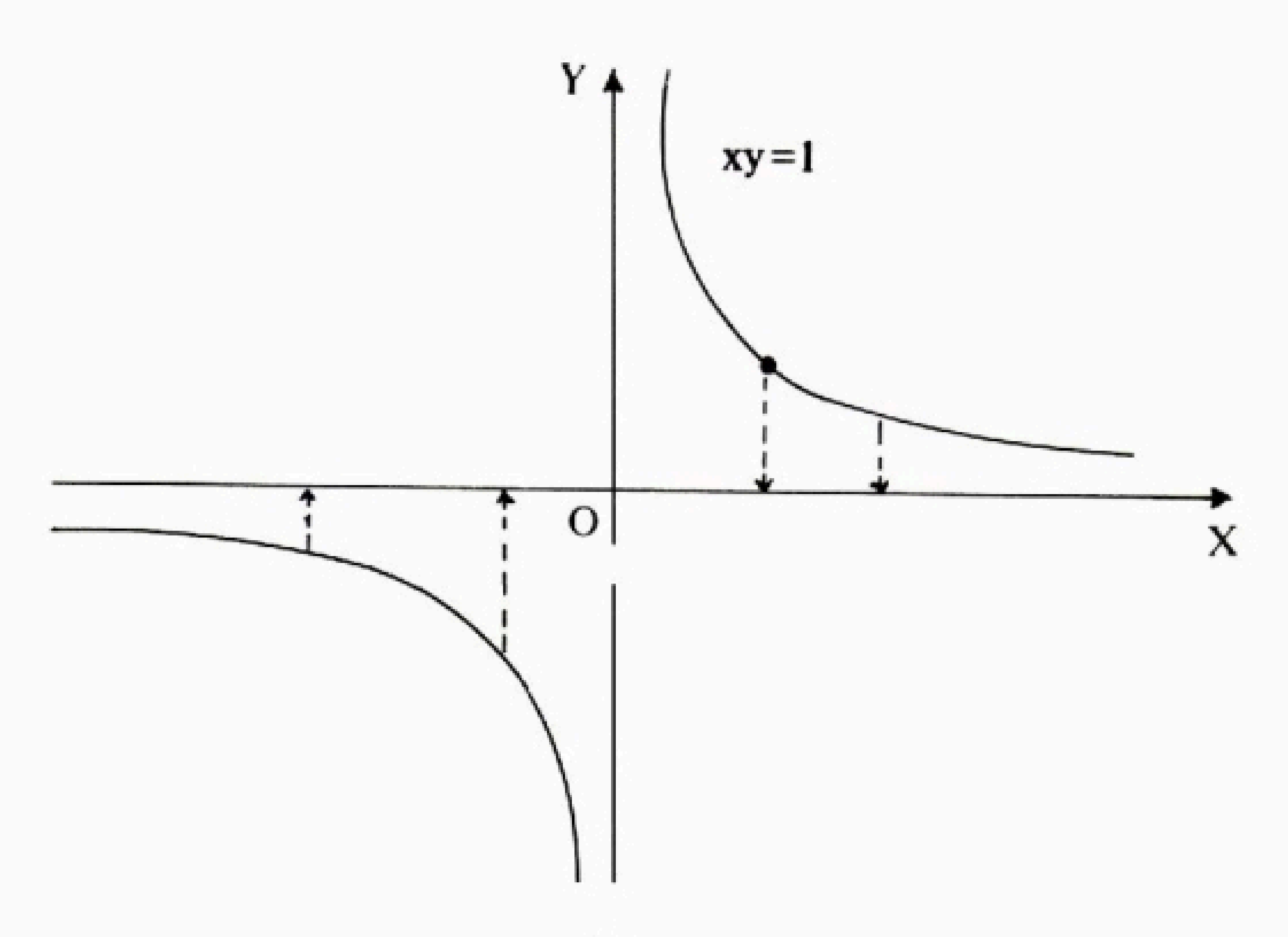
$$B_{o} \ni \mathbf{B} \;\forall\; ،\mathbf{X}_i$$

الآن، وفق نظرية المجموعات، فإن:

$$p_i(\bigcup_K \mathbf{B}_k) = \bigcup_K p_i \mathbf{B}_k$$

لكل مجموعة جزئية $\{ k:B_k \ni K \}$ من B_{o} من ثم، فإن $p_i U$ مجموعة مفتوحة في X_i، كلما كانت U مفتوحة في $\Pi_j X_j$. إذن p_i راسم مفتوح.□

لا يلزم أن يكون $p_i : \Pi_j X_j \rightarrow X_i$ راسما مغلقا، فلنأخذ، مثلا، الفضاء R^2: إن $A = \{ (x.y):xy=1 \}$ مجموعة مغلقة في $\mathbf{R}^2$، بيد أن $p_1 \mathbf{A} = R - \{ O \}$ غير مغلقة في $\mathbf{R}$، حيث p_1 الإسقاط الأول على $\mathbf{R}$.



الشكل(٣،٠٣) إسقاطٌ طبيعي غير مغلق

٣- إنشاء منحنى يملأ المربع(*)

كي نسلط الضوء على أهمية فضاء الجداء، فإننا نتولى في هذا الجزء مهمة إنشاء منحنى غامر من الفضاء I إلى المربع I^2، يدعى منحنى بينو[١]. ومما يجدر ذكره، في هذا الصدد، أنه عندما أنشأ بينو منحنى بهذه المواصفات في القرن الماضي، كان ذلك مثار الدهشة في أوساط الرياضيين. فقد كان في تقدير الكثيرين منهم وقتئذ، أنه لا يوجد راسم مستمر وغامر من I إلى I^2. أما الآن فهنالك أكثر من طريق

(*) هذا الجزء غير متطلب لدراسة أي من الأجزاء الأخرى في الكتاب.

(١) Peano

للوصول إلى هذه النتيجة. وقد آثرنا سلوك الطريق التالي، وأبرز معالمه هو تمثيل فضاء كانتر C كجداء عدد لا نهائي من صور الفضاء المتقطع $\{0,2\}$ والذي نرمز له بالرمز 2. من ذاك المنطلق، نعرف راسماً مستمراً وغامراً من C إلى I^2 وبتمديده خطياً، نحصل على المنحنى الذي نرومه (انظر [12] لطريقة أخرى).

تعريف. إذا أخذنا التبولوجيا المعتادة على مجموعة كانتر C، فنطلق على هذا الفضاء إسم فضاء كانتر(١)، ونرمز له أيضاً بـ C.

١٠,٣ **نظرية**. إذا كان:

$$\alpha : 2^N \to C$$

الراسم المعرف على النحو التالي:

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots) = \sum_1^\infty \frac{a_i}{3^i}$$

$\forall (a_1, a_2, \ldots) \in 2^N$ ، فحينئذ α تكافؤ تبولوجي.

البرهان.

(i) α **راسم تقابلي**:

في ضوء تعريف C، $C = \bigcap_1^\infty F_n$ (الفصل الثاني، الجزء ٣)، نرى أنه كي تنتمي $x \in F_2 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$، فيلزم ويكفي أن يكون لـ x تمثيل فريد على النحو التالي:

$$x = \frac{x_1}{3} + r_1 \text{ ، حيث } x_1 \in \{0,2\} \text{ ،و } 0 \le r_1 \le \frac{1}{3}$$

ولكي تنتمي x إلى F_3 فيلزم ويكفي أن يكون لها تمثيل فريد على الصورة:

---

(١) Cantor space

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + r_2$$

، حيث x_1 و $x_2 \in \{0,2\}$

و $0 \leq r_2 \leq 1/3^2$. وهكذا ، فإن انتماء x إلى F_n يقتضي وجود تمثيل فريد لـ x على الصورة:

$$x = \frac{x_1}{3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{3^{n-1}} + r_{n-1}$$

حيث

$x_1,\ldots,x_n \in \{0,2\}$ ، و $0 \leq r_{n-1} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ ، و $n > 1$

من ذلك نستنتج أن $x \in C$ إذا وإذا فقط كان لها تمثيل فريد كمتسلسلة من النوع التالي:

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \ldots$$

حيث $x_n \in \{0,2\}$ ، $\forall n \in N$. إذن α راسم أحادي وغامر.

(ii) **استمرار** α :

لنأخذ $s = (s_1, s_2, \ldots) \in 2^N$ ، ولتكن: $t = \alpha(s) = \sum_1^\infty \frac{s_i}{3^i}$

لتكن $\xi > 0$. إذن يوجد عدد طبيعي m بحيث أن: $\sum_{m+1}^\infty \frac{2}{3^i} < \xi$

إذا وضعنا $U_1 = \{s_1\}, \ldots, U_m = \{s_m\}$ وأخذنا $U = p_1^{-1}U_1 \cap \ldots \cap p_m^{-1}U_m$ حيث $p_i : 2^N \to 2$ الاسقاط الطبيعي ، فيكون U جواراً مفتوحاً لـ s ، وتكون αU مجموعة النقاط: $y = \sum_1^\infty \frac{y_i}{3^i}$ بحيث أن

$s_i = y_i$ ، $1 \leq i \leq m$ ، و $y_i \in \{0,2\}$ ، $\forall i \in N$

من الجلي ، إذن ، أن:

$$|y-t| \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \xi$$

$\forall\, y \in \alpha(U)$ ، مما يبين أن $\alpha(U)$ محتواة في $C \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. إذن $\alpha: 2^N \rightarrow C$ راسم مستمر عند كل $s \in 2^N$.

(iii) استمرار α^{-1} :

لنفرض أن $t \in C$ تقابل $s \in 2^N$، كما في البند (ii). لنأخذ $j \in N$، ونأخذ الجوار المفتوح $U = p_j^{-1}\{s_j\}$ للنقطة s. ليكن δ عدداً موجباً أقل من $\frac{1}{3^{j+1}}$. من ثم، إذا كانت $y = \alpha(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ تنتمي إلى $C \cap (t-\delta, t+\delta)$، فحينئذ

$$(*)\ldots\ldots \quad \left| \sum_1^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_1^{\infty} \frac{s_i}{3^i} \right| < \delta < \frac{1}{3^{j+1}}$$

مما يستلزم أن $x_i = s_i$, $1 \leq i \leq j$. ذلك لأنه إذا فرضنا جدلاً أن $x_i \neq s_i$، لعدد ما i بحيث أن $1 \leq i \leq j$، فليكن k أصغر الاعداد i بحيث أن $x_i \neq s_i$. من ثم، فإن

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_1^{\infty} \frac{s_i}{3^i} \right| \geq \frac{2}{3^k} - \left| \sum_{k+1}^{\infty} \frac{x_i - s_i}{3^i} \right|$$

$$\geq \frac{2}{3^k} - \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-1/3}$$

$$> \frac{1}{3^{j+1}}$$

مما يتناقض مع (★). إذن $x_i = s_i$, $1 \leq i \leq j$، ومن ثم، فإن $\alpha^{-1}(C \cap (t-\delta, t+\delta))$ مجموعة محتواة في $U = p_j^{-1}\{s_j\}$.

إذا أخذنا الآن جواراً مفتوحاً U للنقطة s، من النوع:

$$U = P_{j_1}^{-1}\{s_{j_1}\} \cap \ldots \cap P_{j_n}^{-1}\{s_{j_n}\}$$

فثمة أعداد موجبة $\delta_1, \ldots, \delta_n$ بحيث أن $\alpha^{-1}(C \cap (t-\delta_i, t+\delta_i))$ تكون محتواة في $P_{j_i}^{-1}\{S_{j_i}\}$، $1 \leq i \leq n$. لتكن δ أصغر الأعداد $\delta_1, \ldots, \delta_n$. إذن $\alpha^{-1}(C \cap (t-\delta, t+\delta))$ محتواة في U. يترتب على ذلك أن α^{-1} مستمر عند كل $t \in C$.

يترتب على (i) و (ii) و (iii) أن α تكافؤ تبولوجي. □

٣,١١ استنتاج. مجموعة كانتر C غير قابلة للعد.

البرهان. بما أن 2^N هي مجموعة المتواليات في $\{0,2\}$، فإنها غير قابلة للعد. نظراً لوجود التقابل $\alpha :2^N \to C$ ، فإن C أيضاً مجموعة غير قابلة للعد. □

استناداً على نظرية ٣,١٠ والنظرية التالية، يتضح أن C^m مكافيء تبولوجيا لـ C^n، $\forall$ m و n $\in$ N.

٣,١٢ نظرية. الراسم

$$\beta :2^N \to 2^N \times 2^N$$

$$\beta (a_1,a_2,\ldots)=((a_1,a_3,\ldots),(a_2,a_4,\ldots))$$

$\forall (a_1,a_2,\ldots) \in 2^N$ ، تكافؤ تبولوجي.

البرهان. من الجلي أن β أحادي وغامر، وإذا طبقنا نظرية ٣,٠٨، فيتضح أنه ومعكوسه راسمان مستمران. من ثم، فإن β تكافؤ تبولوجي. □

تعريف. يقال إن الفضاء التبولوجي Y صورة مستمرة(١) للفضاء التبولوجي X إذا كان هنالك راسم مستمر وغامر $f:X \to Y$.

سوف نبين أن المربع I^2 صورة مستمرة لـ C.

٣,١٣ تمهيد. لتكن X_1 و X_2 و Y_1 و Y_2 فضاءات تبولوجية. ليكن $f_i:X_i \to Y_i$ راسماً مستمراً وغامراً، $i=1,2$. حينئذ فإن الراسم:

$$f_1\times f_2 :X_1\times X_2 \to Y_1\times Y_2$$

$$f_1\times f_2\ (x_1,x_2)=(f_1(x_1),f_2(x_2))$$

يكون مستمراً وغامراً.

البرهان. بالنظر إلى الشكل الإبدالي:

---

(١) Continuous image

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & Y_1 \times Y_2 \\ \downarrow P_i & & \downarrow q_i \\ X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \end{array}$$

حيث p_i و q_i الاسقاطان الطبيعيان، $i=1,2$ ، ووفق نظرية ٣,٠٨ ، فإن $f_1 \times f_2$ راسم مستمر.

من الواضح أن $f_1 \times f_2$ راسم غامر. □

٣,١٤ **نظرية.** يوجد راسم مستمر وغامر:

$$\tau : C \to I^2$$

البرهان

الخطوة الأولى: لنعتبر الراسم:

$$\gamma : 2^N \to I$$

المعرف على النحو التالي:

$$\gamma(a_1, a_2, \ldots) = \sum_1^\infty \frac{a_i}{2^{i+1}}$$

$\forall (a_1, a_2, \ldots) \in 2^N$. بالإمكان إثبات استمرار γ بمنطق شبيه بالذي سيق لبرهان استمرار α في نظرية ٣,١٠.

علاوة على ذلك. إذا كانت $x \in I$ لها المفكوك الثنائي[١]:

$$x = \sum_1^\infty \frac{x_i}{2^i} \text{ حيث } x_i \in \{0,1\}, \ \forall i \in N$$

فحينئذ $x = \gamma(2x_1, 2x_2, \ldots)$ ، مما يبين أن γ راسم غامر.

الخطوة الثانية: إذا اعتبرنا الآن التركيب τ التالي:

---

(١) The dyadic expansion

$$C \xrightarrow{\alpha^{-1}} 2^N \xrightarrow{\beta} 2^N \times 2^N \xrightarrow{\gamma\times\gamma} I\times I$$

فيسهل التحقق من أن τ مستمر وغامر. □

أضحى الطريق ممهداً الآن للوصول إلى منحنى بينو.

تعريف. إذا كانت [a,b] فترة مغلقة، وعرفنا $c=f(a) \ni R$، و $d=f(b) \ni R$، فالممدد الخطى[1] F لـ f على [a,b] هو الدالة المستمرة:

$$F:[a,b] \to R$$

$$0 \le t \le 1 \text{ , } F(a+t(b-a)) = c+t(d-c)$$

٣,١٥ نظرية (نظرية بينو). ثمة راسم مستمر وغامر من الفترة I إلى المربع I^2.

البرهان. لتكن τ_1 و τ_2 الدالتين المركبتين للراسم $\tau: C \to I^2$، أي أن:

$$C \ni x \; \forall \text{ , } \tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x))$$

نمدد كلا من τ_1 و τ_2 خطياً على الفترات $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ ، $[\frac{2}{9}, \frac{1}{9}]$ ، $[\frac{8}{9}, \frac{7}{9}]$ ،.... فنحصل على راسمين مستمرين $\gamma_1 , \gamma_2 : I \to I$

بحيث أن $\gamma_i | C = \tau_i$ ، $i = 1, 2$ ، لنعتبر الآن الراسم:

$$\gamma : I \to I^2$$

الذي له الدالتان المركبتان γ_1 و γ_2 . بما أن $\gamma | C = \tau$ ، إذن γ راسم غامر. علاوة على ذلك، فإن γ راسم مستمر لأن γ_1 و γ_2 مستمران. هذا يكمل برهان النظرية. □

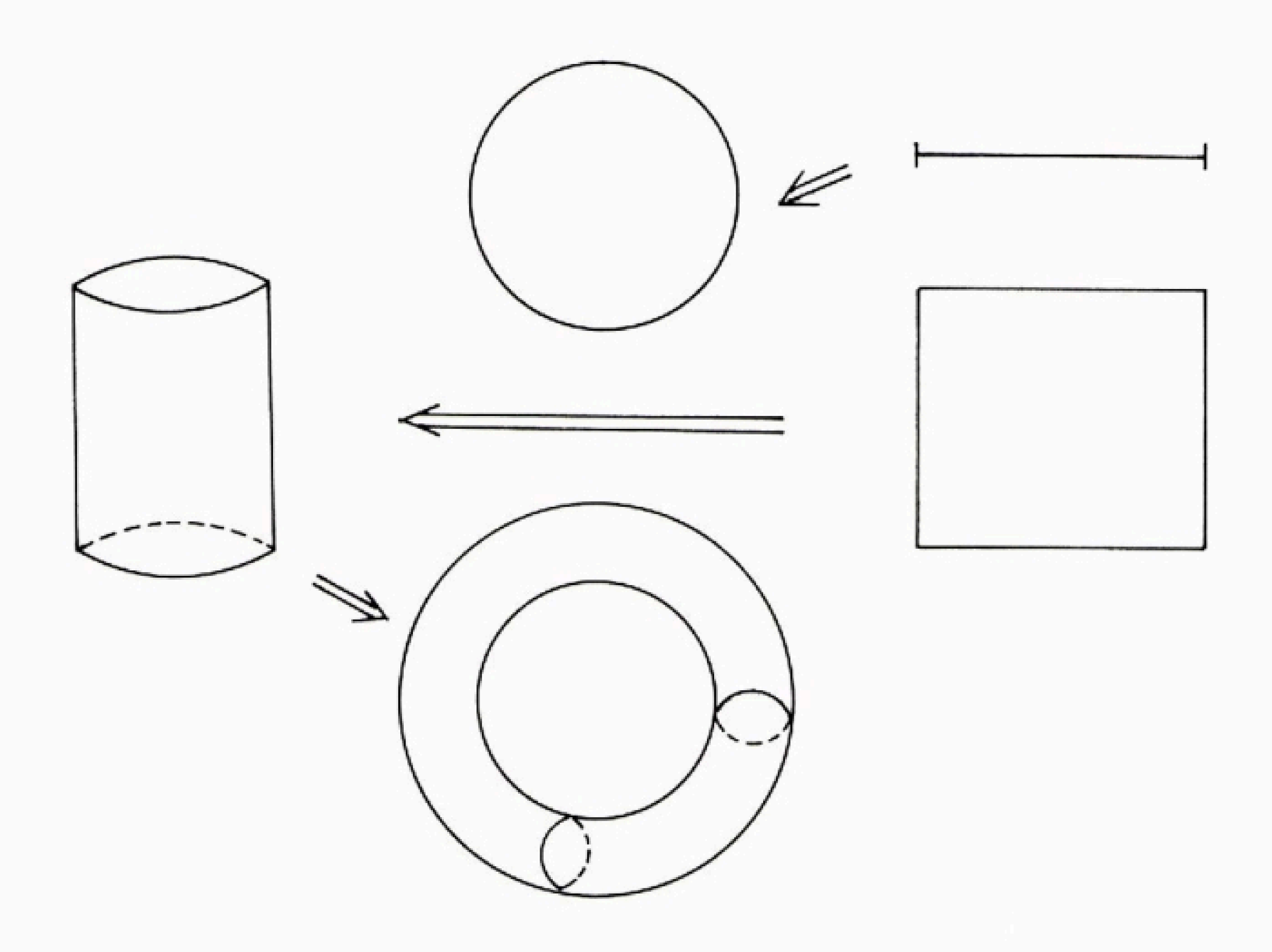
٤ــ فضاءات المطابقة

إذا أخذنا قطعة من السلك الرفيع، ثم ثنيناها حتى يلتقي طرفاها، فإننا نحصل على شكل مكافيء للدائرة S^1. كذلك إذا كانت لدينا قطعة من الورق على شكل مستطيل، وثنيناها إلى أن يلتصق ضلعان متقابلان منها، فتكون لنا اسطوانة دائرية. بإجراء عملية مشابهة على الاسطوانة، فإنه يتسنى لنا تحويلها إلى طارة[2]، وهي شكل السطح الخارجي لإطار السيارة.

---

(١) The linear extension

(٢) Torus



الشكل (٣,٠٤) أمثلة لفضاءات مطابقة

في كل من هذه الحالات، أخذنا فضاء تبولوجيا، وأجرينا عليه تشويها حتى تطابقت بعض نقاطه، فحصلنا على فضاء تبولوجي جديد. تلك هي الفكرة الحدسية وراء الأسلوب الثالث لاستحداث فضاءات جديدة تسمى فضاءات المطابقة أو فضاءات حاصل القسمة.

في السطور التالية، نقدم هذا الموضوع في قالب رياضي:

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا، ولتكن Y مجموعة غير خالية، وليكن $f: X \to Y$ راسماً غامراً. **تبولوجيا حاصل القسمة**[1] (تختصر ت.ح.ق.) على Y الناشئة عن f هي التبولوجيا:

$\mathcal{V} = \{V : V \subset Y,\ f^{-1}V$ مجموعة مفتوحة في X $\}$. **وفضاء حاصل القسمة**[2] (يختصر ف.ح.ق.) الناشيء عن f هو الفضاء $(Y, \mathcal{V})$.

لنتحقق من أن $\mathcal{V}$ تُعرف تبولوجياً على Y:

(١) The quotient topology

(٢) The quotient space

أولاً: بما أن $\phi = f^{-1}\phi$ و $X = f^{-1}Y$، إذن ϕ و $Y \in \mathcal{V}$.

ثانياً: إذا كانت $V_j \in \mathcal{V}$، لكل j في مجموعة J، فنظراً إلى أن $f^{-1}(\underset{J}{\cup} V_j)$ تتطابق مع المجموعة $\underset{J}{\cup} f^{-1} V_j$ المفتوحة في X، حينئذ فإن $\underset{J}{\cup} V_j \in \mathcal{V}$.

ثالثاً: إذا كانت $V_1,...,V_n \in \mathcal{V}$، حينئذ فإن $f^{-1}(\overset{n}{\underset{1}{\cap}} V_j) = \overset{n}{\underset{1}{\cap}} f^{-1} V_j$، فهي إذن مجموعة مفتوحة في X، مما يستلزم أن $\overset{n}{\underset{1}{\cap}} V_j \in \mathcal{V}$.

من الجلي أن ت. ح. ق. على Y الناشئة عن f، هي أكبر تبولوجيا على Y بحيث يكون $f: X \to Y$ مستمراً.

تعريف. إذا كان f راسماً غامراً من فضاء تبولوجي X إلى فضاء آخر Y، فيقال إن f **راسم حاصل قسمة**[1] (ر.ح.ق.) إذا كانت التبولوجيا المعطاة على Y تتطابق مع ت.ح.ق. الناشئة عن f.

من السهل إقامة البرهان على تكافؤ الدعاوي التالية بالنسبة لراسم غامر $f: X \to Y$: -

أ. $f: X \to Y$ ر.ح.ق.

ب. تكون V مجموعة مفتوحة في Y إذا وإذا فقط كانت $f^{-1}V$ مجموعة مفتوحة في X.

جـ. تكون V مجموعة مغلقة في Y إذا وإذا فقط كانت $f^{-1}V$ مجموعة مغلقة في X.

٣,١٦ **مثال**. كل تكافؤ تبولوجي هو ر.ح.ق. في الحقيقة، كل راسم مستمر وغامر، ومفتوح أو مغلق، هو ر.ح.ق.

٣,١٧ **مثال**. إذا كانت Y الاسطوانة:

$$Y = \{(x,y,z): x^2 + y^2 = 1 ,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

حينئذ $f: I^2 \to Y$ حيث:

$$f(x,y) = (\cos 2\pi x ,\ \sin 2\pi x, y)$$

ر.ح.ق.

الآن نبين كيف أن وجود علاقة تكافؤ على فضاء تبولوجي يؤدي إلى تعريف تبولوجيا على مجموعة فصول التكافؤ.

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا، و $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة X، وليكن $\nu: X \to X/_\sim$

---

(١) Quotient map

الراسم الطبيعي. حينئذ يُطلَق على ف.ح.ق. الناشيء عن γ اسم **فضاء المطابقة**(١) **المعرف** ب $\sim$.

من ثم، فإن U تكون مجموعة مفتوحة في فضاء المطابقة $X/_\sim$ إذا وإذا فقط كان اتحادُ فصول التكافؤ التي تشكل U مجموعةً مفتوحة في X.

دلالة. ليكن X فضاء تبولوجيا، وA مجموعة جزئية من X. لتكن $\sim$ علاقة التكافؤ على X التي لها فصول التكافؤ: A و $\{x\}, \forall x \in A^c$. عندئذ يرمز لفضاء المطابقة $X/_\sim$ ب $X/_A$.

ملاحظة. تعود التسمية «فضاء المطابقة» إلى أنه إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X، وعلاقة تكافؤ $\sim$ عليه، ففضاء المطابقة $X/_\sim$ قد انبثق في تصورنا عن الفضاء X باعتبار كل النقاط التي تُشكِلُ فصل تكافؤ واحد نقاطاً متطابقة، تُعامَل كنقطة واحدة.

٣,١٨ **مثال**. إذا أخذنا الفضاء المعتاد I، حينئذ $I/_{\{0,1\}}$ مكافيء تبولوجياً ل S^1، لأن:

$$f : I/_{\{0,1\}} \rightarrow S^1$$

$$I/_{\{0,1\}} \ni [s] \forall \ , f([x]) = (\cos 2\pi s , \sin 2\pi s)$$

تقابل مستمر، له معكوس مستمر.

تعريف. لتكن $\sim$ علاقة التكافؤ التالية على S^n: $x \sim y$ إذا كانت $x = \pm y$, $\forall x$ و $y \in S^n$. يدعى فضاء المطابقة $S^n/_\sim$ **الفضاء الاسقاطي** P^n(٢).

فيما يلي، نورد بعض خواص رواسم حاصل القسمة. وأولى هذه الخواص تتعلق باستمرار الراسم الذي يكون نطاقه ف.ح.ق.

٣,١٩ **نظرية**. ليكن $f:X \rightarrow Y$ ر.ح.ق. إذا كان Z فضاء تبولوجيا، و $g:Y \rightarrow Z$ راسماً، فلكي يكون g مستمراً فإنه يلزم ويكفي أن يكون $gof : X \rightarrow Z$ مستمراً.

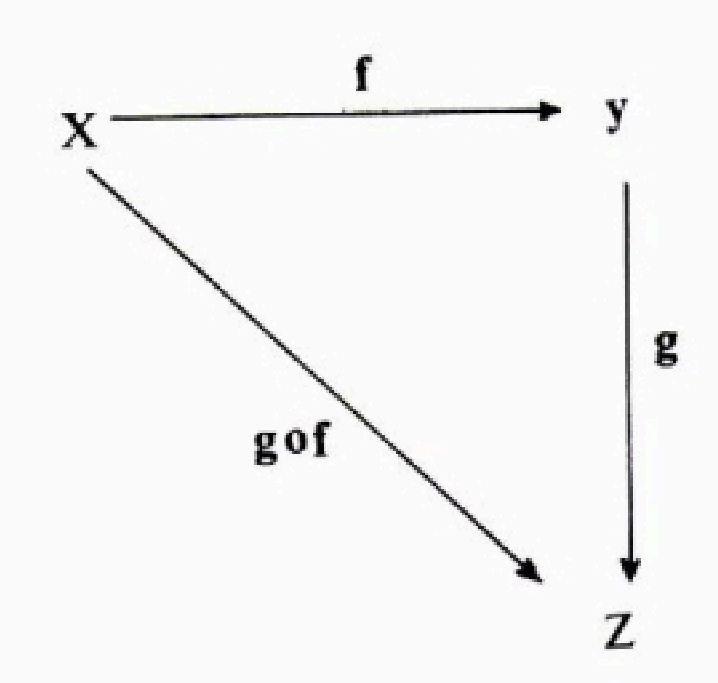
البرهان. بما أن f ر. ح. ق.، فإنه راسم مستمر. من ثم، إذا كان g مستمرا، حينئذ فإن gof راسم مستمر.

لنفرض الآن أن gof راسم مستمر. لتكن U مجموعة مفتوحة في Z اذن $f^{-1}(g^{-1}U) = (gof)^{-1}U$ مفتوحة في X. بما أن f ر.ح.ق. إذن $g^{-1}U$ مفتوحة في Y . من ثم، فإن g راسم مستمر. □

---

(١) Identification space

(٢) The projective space



الشكل (٣,٠٥) تكافؤ استمرار **g** و gof

أما الخاصة الثانية، فتتعلق بالسؤال: متى يكون جداء راسمي حاصل قسمة راسم حاصل قسمة؟

٣,٢٠ **نظرية**. إذا كان $f_i : X_i \to Y_i$ ر.ح.ق.، $i=1,2$، وكان f_1 و f_2 راسمين مفتوحين أو مغلقين، فحينئذ:

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

ر.ح.ق.

البرهان. نثبت النظرية باعتبار أن f_1 و f_2 مفتوحان. وفق نظرية ٣,٨، فإن $f_1 \times f_2$ راسم مستمر. إذن كلما كانت V مفتوحة في $Y_1 \times Y_2$، فإن $(f_1 \times f_2)^{-1}V$ تكون مفتوحة في $X_1 \times X_2$.

لنفترض الآن أن A مجموعة جزئية من $Y_1 \times Y_2$ بحيث أن $(f_1 \times f_2)^{-1}A = B$ مفتوحة في $X_1 \times X_2$. استناداً على تعريف تبولوجيا الجداء، فثمة تمثيل لـ B على النحو التالي: $B = \bigcup_j U_j \times V_j$ حيث U_j مفتوحة في X_1، و V_j مفتوحة في X_2، $\forall j \ni J$. بما أن f_1 و f_2 مفتوحان، فإن $(f_1 \times f_2)(B) = \bigcup_j f_1 U_j \times f_2 V_j$ مجموعة مفتوحة في $Y_1 \times Y_2$. الآن $A = (f_1 \times f_2)(B)$ لأن $f_1 \times f_2$ راسم غامر، مما يترتب عليه أن A مفتوحة في Y.

من ثم، فإن f ر.ح.ق.

نترك للطالب مهمة إثبات النظرية عندما يكون f_1 و f_2 مغلقين. □

والخاصة الثالثة هي أن تركيب راسمي حاصل قسمة يكون ر.ح.ق.

٣,٢١ **نظرية**. إذا كان كل من $f:X \to Y$ و $g:Y \to Z$ ر.ح.ق.، **فحينئذ** gof ر.ح.ق.

البرهان. بما أن g ر.ح.ق.، إذن تكون W مفتوحة في Z إذا وإذا فقط كانت $g^{-1}W$ مفتوحة في Y. الآن f أيضاً ر.ح.ق.، مما يترتب عليه أن $g^{-1}W$ تكون مفتوحة في الفضاء Y إذا وإذا فقط كانت $(gof)^{-1}W = f^{-1}(g^{-1}W)$ مفتوحة في X. إذن gof ر.ح.ق. □

تمارين (٣)

الجزء الثاني

١ – بين أنه إذا كانت B قاعدة لفضاء تبولوجي Y، و $f:X \to Y$ راسماً بحيث أن $f^{-1}B$ مجموعة مفتوحة في X، $\forall B \in B$، فحينئذ يكون f راسماً مستمراً.

٢ – أثبت أن مجموعة المستطيلات النصف مفتوحة – مغلقة: $(a,b]\times(c,d]$ تشكل قاعدة مولدة لتبولوجيا على R^2. بين أن كل عنصر من هذه القاعدة هو مجموعة مفتوحة ومغلقة في الفضاء المولد.

٣ – برهن أنه إذا كان X_j فضاء هاوسدورف، لكل j في مجموعة J، فحينئذ يكون فضاء الجداء $\prod_J X_j$ فضاء هاوسدورف.

٤ – اثبت أنه إذا كان X و Y فضاءين قابلين للتعبير المتري، حينئذ فإن فضاء الجداء $X\times Y$ قابل للتعبير المتري.

٥ – بين أنه إذا كانت J مجموعة ما، و F_j مجموعة مغلقة في فضاء تبولوجي X_j، $\forall j \in J$، فحينئذ $\prod_J F_j$ مجموعة مغلقة في $\prod_J X_j$.

٦ – ليكن $\prod_J X_j$ فضاء جداء. لنأخذ $a \in \prod_J X_j$، ولنضع

$X_a = \{ x \in \prod_J X_j : a(j)=x(j)$ لكل عناصر J ما عدا عدداً منتهياً منها $\}$.

اثبت أن $\prod_J X_j = \overline{X_a}$.

٧ – بين أنه إذا كان $\prod_J X_j$ و $\prod_J Y_j$ فضاءي جداء، بحيث أن X_j مكافيء تبولوجيا لـ Y_j، $\forall j \in J$، فعندئذ $\prod_J X_j$ و $\prod_J Y_j$ فضاءان متكافئان.

الجزء الثالث

٨ – بين أن الفضاء Y صورة مستمرة للفضاء X في كل من الحالات التالية:

(i) $X=I$, $Y=I^n$

(ii) $X=S^1$, $Y=I^n$

(iii) $X=I$, $Y=S^1\times\ldots\times S^1$ (n مرة)

٩ – بين أن C^m مكافيء لـ C^n, $\forall$ m و n $\ni$ N

الجزء الرابع

١٠ – لتكن

$A_1 = \{0\}$ ، و$A_2 = (0,1)$ و $A_3 = \{1\}$

لتكن ~ علاقة التكافؤ على I المعرفة بالتجزيء $\{A_1, A_2, A_3\}$.

بين أن $I/\sim$ غير قابل للتعبير المتري.

١١ – اثبت أن فضاء المطابقة $I_{/A}$ حيث $A = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ مكافيء تبولوجيا لاتحاد الدائرتين:

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $(x+1)^2 + y^2 = 1$

١٢ – بين أن الفضاء الاسقاطي P^1 مكافيء تبولوجيا لـ S^1.

١٣ – بين أن $D^2/_{S^1}$ مكافيء تبولوجيا لـ S^2. من ثم، بين أن S^2 صورة مستمرة لـ (i) I و (ii) C.

الفصل الرابع

الاتصال

Connectedness

مقدمة

يتعلق هذا الفصل بدراسة خاصة تبولوجية تعرف بالاتصال. وتصورنا الحدسي للفضاء التبولوجي المتصل، أنه الشكل الهندسي الذي يتكون من «قطعة» واحدة فقط، ففي حين أن الفضاء I فضاء متصل، فعلى العكس من ذلك الفضاء $[1,2] \cup [3,4]$.

أما التعريف الرياضي للفضاء المتصل فهو الفضاء X الذي يستوفي الشرط التالي:

لا توجد مجموعتان U و V غير خاليتين بحيث:

(i) U و V مفتوحتان في X

(ii) $X = U \cup V$، و $U \cap V = \phi$ و

على هذا الأساس، سوف نبين أن مجموعة الفضاءات الجزئية المتصلة في R تتطابق مع مجموعة الفترات في R.

وتقود هذه الدراسة إلى عدة تطبيقات:

(١) تعميم نظرية القيمة الوسطى[١] على النحو التالي:

إذا كانت f دالة مستمرة على فضاء متصل X، و a و b $\in$ X، و $\lambda \in R$ بحيث أن $f(a) < \lambda < f(b)$. فحينئذ توجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = \lambda$.

(٢) نظرية النقطة الثابتة لبراور[٢] في البعد ١: إذا كان $f: D^1 \to D^1$ راسما مستمرا، حينئذ هنالك نقطة ثابتة لـ f، أي توجد $x \in D^1$ بحيث أن $f(x) = x$.

---

(١) Intermediate value theorem

(٢) Brouwer

(٣) نظرية بورسك – الم[١] في البعد ١ : إذا كان $f:S^1 \to \mathbf{R}$ راسما مستمرا ، فثمة $x \in S^1$ بحيث أن $f(x)=f(-x)$.

وجدير بالذكر ، أن الصيغة المماثلة في البعد n لكل من النظريتين السابقتين صحيحة ، إلا أن إقامة البرهان عليها يتطلب أدوات أقل بساطة. ولسوف نقوم باثبات النظريتين في البعد 2 باستخدام الزمرة الأساسية ، في الفصل التاسع.

وبالاضافة للاتصال ، فسوف نتطرق أيضاً في هذا الفصل لموضوع الاتصال بالمسارات.

١– الفضاءات المتصلة

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا ، و U و V مجموعتين مفتوحتين في X ، غير خاليتين. يقال إن الزوج (U , V) **فصل**[٢] لـ X إذا كان اتحاد U و V يساوي X ، و U و V لا يتقاطعان. يقال إن X فضاء **متصل**[٣] إذا لم يكن هنالك فصل له.

من ثم ، فلكي يكون X فضاء متصلا فيلزم ويكفي أن لا توجد مجموعة مفتوحة ومغلقة معا في X ما عدا X و ϕ .

(ندع مهمة الاثبات للطالب).

٤,١ **مثال**. إذا أخذنا مجموعة لانهائية X ، واعتبرنا تبولوجيا المتممة المنتهية عليها ، نجد أن X فضاء متصل. لأنه إذا افترضنا جدلا أن (U و V) فصل لـ X ، فبما أن U مفتوحة وغير خالية ، فإن V مجموعة منتهية. بحجة مشابهة ، فإن U أيضاً مجموعة منتهية ، مما يترتب عليه أن X مجموعة منتهية.

٤,٢ **مثال**. كل فضاء لامتقطع هو فضاء متصل.

٤,٣ **مثال**. إذا اعتبرنا فضاء الاعداد القياسية Q ، فحينئذ $U=(-\infty,\sqrt{2})\cap Q$ و $V=(\sqrt{2},\infty)\cap Q$ يشكلان فصلا لـ Q ، مما يبين أنه غير متصل.

نهدف الآن إلى تحديد الفضاءات الجزئية المتصلة من R ، وبذلك نمهد الطريق للتطبيقات التي تقدم ذكرها في المقدمة.

---

(١) Borsuk-Ulam

(٢) separation

(٣) Connected

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي X، فيقال إنها **مجموعة جزئية متصلة**[١] في X إذا كان الفضاء الجزئي A متصلا.

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من R، فتسمى **فترة** إذا كانت تستوفي الشرط التالي:

إذا كان a و b ∋ A بحيث أن $a < b$، وإذا كان c عددا حقيقيا بحيث أن $a < c < b$، حينئذ فإن c ∋ A.

٤،٤ **نظرية**. إذا كانت A مجموعة جزئية من R، فالشرط اللازم والكافي كي تكون A متصلة في R أن تكون A فترة في R.

البرهان

أولا: لنفرض أن A متصلة في R. لنفرض جدلا أن A ليست فترة. إذن توجد أعداد حقيقية a و b و c بحيث أن $a < c < b$، و b,a ∋ A، أما c فتنتمي إلى متممة A. يترتب على ذلك، أن $U = A \cap (-\infty, c)$ و $V = A \cap (c, \infty)$ يشكلان فصلا للفضاء الجزئي A، مما يتناقض مع افتراضنا أن A فضاء متصل. إذن لا بد أن تكون A فترة.

ثانيا: نفرض أن A فترة. لنفرض جدلا أن A غير متصلة في R. إذن ثمة فصل (F, G) للفضاء الجزئي A. نختار نقطة a في F، و b في G، ونفرض، دون مساس بالعمومية، أن $a < b$. استنادا على تعريف التبولوجيا النسبية، وبما أن F مغلقة في A $(G = A - F)$، فثمة مجموعة F_1 مغلقة في R بحيث أن $F = A \cap F_1$. بما أن A فترة، إذن [a و b] محتواة في A، ولذا فإن:

$$\begin{aligned}[a, b] \cap F &= [a, b] \cap (A \cap F_1) \\ &= ([a, b] \cap A) \cap F_1 \\ &= [a, b] \cap F_1\end{aligned}$$

مما يترتب عليه أن $[a, b] \cap F$ مغلقة في R. من ثم، فإن $c = \sup [a,b] \cap F$ تنتمي إلى $[a,b] \cap F$، فهي إذن لا تنتمي إلى G. من ناحية أخرى، فإن $(c,b]$ محتواة في G، و G مغلقة في A، مما يستلزم انتماء c إلى G. إذن افتراضنا أن A غير متصلة يؤدي إلى تناقض، ومن ثم، فإن كل فترة تكون متصلة في R. □

إذا كانت P خاصة ما تتعلق بالفضاءات التبولوجية، فيقال إنها **خاصة تبولوجية**[٢] إذا استوفت الشرط التالي:

---

(١) Connected subset

(٢) topological property

إذا كان X فضاء تبولوجيا يتمتع بالخاصة P ، حينئذ فإن كل فضاء مكافىء تبولوجيا لـ X يتمتع بـ P.

يتبين مما يلي أن الاتصال خاصة تبولوجية.

٤,٥ نظرية. كل صورة مستمرة لفضاء متصل هي فضاء متصل.

البرهان. ليكن X فضاء تبولوجيا متصلا، وليكن f راسما مستمرا وغامرا من X إلى فضاء تبولوجي Y. لنفرض جدلا أن هنالك فصل (U , V) لـ Y. يترتب على ذلك، أن ($f^{-1}U$ و $f^{-1}V$) فصل لـ X، مما يتناقض مع افتراضنا أن X فضاء متصل. إذن Y فضاء متصل. □

٤,٦ مثال. S^1 صورة مستمرة لـ I لأن $f:I \to S^1$ حيث $f(t)=(\cos 2\pi t$ و $\sin 2\pi t)$، $\forall t \in I$، راسم مستمر وغامر. إذن S^1 فضاء متصل (نظرية ٤,٤ و٤,٥).

٤,٧ استنتاج. الاتصال خاصة تبولوجية.

نترك مهمة البرهان على عاتق الطالب.

٤,٨ استنتاج. إذا كان X فضاء تبولوجيا قابلا للعد ومتصلا، حينئذ لا يكون X نطاقا لدالة مستمرة غير ثابتة.

البرهان. لتكن f دالة مستمرة على X. وفق نظرية ٤,٥ ، فإن f(X) مجموعة جزئية متصلة من R. إذن f(X) فترة في R (نظرية ٤,٤). بما أن X مجموعة قابلة للعد، فإن f(X) قابلة للعد، من ثم، فإن f(X) تحوي نقطة واحدة، أي أن f دالة ثابتة. □

لقد مررنا بفضاءات قابلة للعد ومتصلة، فعلى سبيل المثال، هنالك الفضاءات اللامتقطعة القابلة للعد، وكذلك فضاء المتممة المنتهية Q. بيد أن هذه الفضاءات جميعا غير هاوسدورف. فهل يوجد فضاء هاوسدورف، قابل للعد ومتصل؟ الاجابة: نعم، فقد أنشأ قولمب[١] (١٩٥٩ م) تبولوجيا $\mathcal{U}$ على مجموعة الأعداد الطبيعية N بحيث أن $(N,\mathcal{U})$ فضاء هاوسدورف ومتصل، وكما هو معلوم، فإن N قابلة للعد (انظر [9] ص 129).

٢– تطبيقات

يتعلق هذا الجزء بالتطبيقات التي أشرنا إليها آنفاً. والتطبيق الأول تعميم لنظرية القيمة الوسطى، والتي تنص على ما يلي: إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة [a,b]، وإذا كان λ عدداً حقيقيا يقع بين f(a) و f(b)، فثمة $x \in [a,b]$ بحيث أن $f(x)=\lambda$.

---

(١) Golomb

٤,٩ **نظرية**. ليكن X فضاء تبولوجيا متصلا، ولتكن $f:X \to R$ دالة مستمرة. لتكن x_1 و $x_2 \in X$، وليكن λ عدداً حقيقياً بحيث أن $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$. حينئذ توجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = \lambda$.

البرهان. وفق نظريتي ٤,٤ و٤,٥، فإن $f(X)$ فترة في R. بما أن $f(x_1)$ $f(x_2)$ $\in f(X)$، و $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$، إذن $\lambda \in f(X)$. □

٤,١٠ **نظرية** (نظرية النقطة الثابتة لبراور في البعد ١ [١]). إذا كان $f:D^1 \to D^1$ راسما مستمرا، فحينئذ ثمة نقطة ثابتة x لـ f. (أي أن $f(x)=x$).

(القرص المغلق $D^1 = [-1, 1]$)

البرهان. إذا كان $f(-1) = -1$ أو $f(1) = 1$، حينئذ ١- أو ١ نقطة ثابتة لـ f.

لنفرض أن $f(-1) \neq -1$، و $f(1) \neq 1$. يترتب على ذلك أن $f(-1) > -1$ و $f(1) < 1$. لنعتبر الدالة $g:D^1 \to R$ حيث $g(x)=f(x)-x, \forall x \in D^1$. بما أن D^1 فضاء متصل (نظرية ٤,٤)، و $g(-1) > 0$ و $g(1) < 0$، حينئذ ثمة $x \in D^1$ بحيث أن $g(x)=0$، أي أن $f(x)=x$. □

٤,١١ **نظرية** (نظرية بورسك - الم في البعد ١ [٢]). إذا كانت $f:S^1 \to R$ دالة مستمرة، حينئذ توجد $x \in S^1$ بحيث أن $f(x)=f(-x)$.

البرهان. لتكن a النقطة $(1,0)$ في S^1. إذا كانت $f(a)=f(-a)$، فنأخذ $x=a$..

لنفرض أن $f(a) \neq f(-a)$. لنعتبر الدالة $g:S^1 \to R$ حيث $g(x)=f(x)-f(-x), \forall x \in S^1$. لنلاحظ أن g دالة مستمرة، وأن أحد العددين $g(a)$ و $g(-a)$ موجب والآخر سالب. بما أن S^1 فضاء متصل (مثال ٤,٦)، فيترتب على نظرية ٤,٩ أن هنالك $x \in S^1$ بحيث أن $g(x)=0$، أي أن $f(x)=f(-x)$. □

٣- استحداث فضاءات متصلة

في هذا الصدد، نبحث ثلاثة أساليب لانشاء فضاءات متصلة جديدة. والأسلوب الأول يقوم على أخذ اتحاد فضاءات جزئية متصلة لها تقاطع غير خال.

٤,١٢ **نظرية**. ليكن X فضاء تبولوجيا، ولتكن A_j مجموعة جزئية متصلة من X، لكل j في عائلة مرقمة J. ليكن $\bigcap_J A_j$ غير خال. حينئذ فإن $\bigcup_J A_j$ مجموعة جزئية متصلة.

---

(١) The Brouwer fixed point theorem in dim. 1

(٢) The Borsuk-Ulam theorem in dim. 1

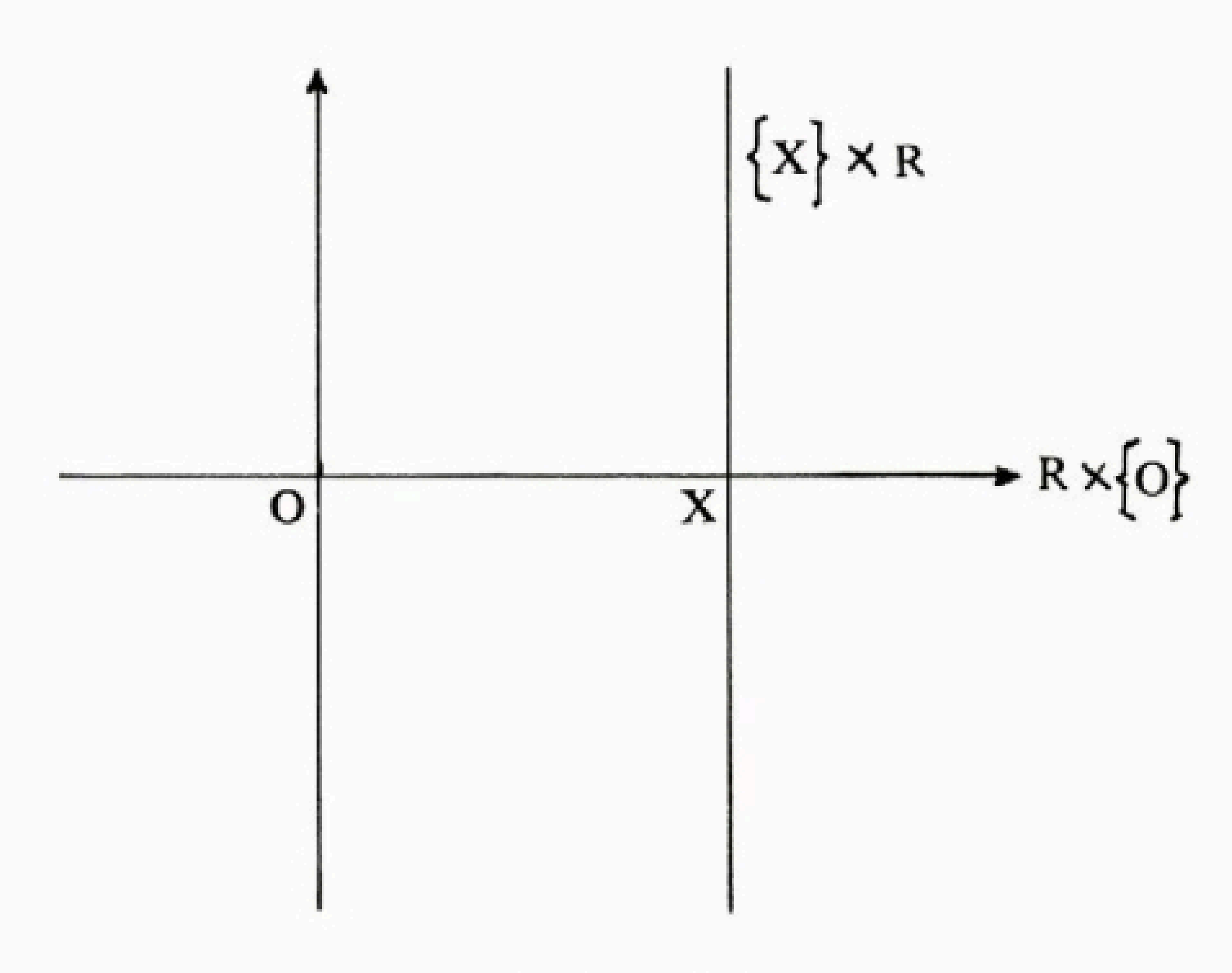
البرهان. لنفرض جدلا أن (V و U) يشكل فصلا للفضاء الجزئي $\bigcup_J A_j$. إذن $\forall\ j \in J$، أما أن A_j لا تقاطع U أو لا تقاطع V، وإلاّ لكان $(A_j \cap U$ ، $A_j \cap V)$ فصلا للفضاء المتصل A_j. يترتب على ذلك، أن A_j محتواة في U أو في V، $\forall j \in J$. بما أن $\bigcap_J A_j$ غير خال، فإما أن $\bigcup_J A_j$ محتواة في U أو في V، مما يتناقض مع افتراضنا أن (U ، V) فصل لـ $\bigcup_J A_j$. إذن $\bigcup_J A_j$ فضاء جزئي متصل من X. □

كتطبيق لهذه النظرية، نبين أن $\mathbf{R}^2$ و S^2 فضاءان متصلان.

٤,١٣ **مثال**. R^2 فضاء متصل: $\forall\ x \in R$، نعرف:

$$A_x = \mathbf{R} \times \{0\} \cup \{x\} \times \mathbf{R}$$

بما أن كلا من $R\times\{0\}$، و $\{x\}\times R$ مكافىء تبولوجيا لـ R، من ثم فكلاهما فضاء جزئي متصل من R^2. الآن $R\times\{0\}$ يقاطع $\{x\}\times R$، إذن A_x فضاء جزئي متصل من R^2، وفق نظرية ٤,١٢. بما أن $\bigcap_R A_x \neq \phi$، فاستنادا على نفس النظرية، فإن $\mathbf{R}^2=\bigcup_R A_x$ فضاء متصل.



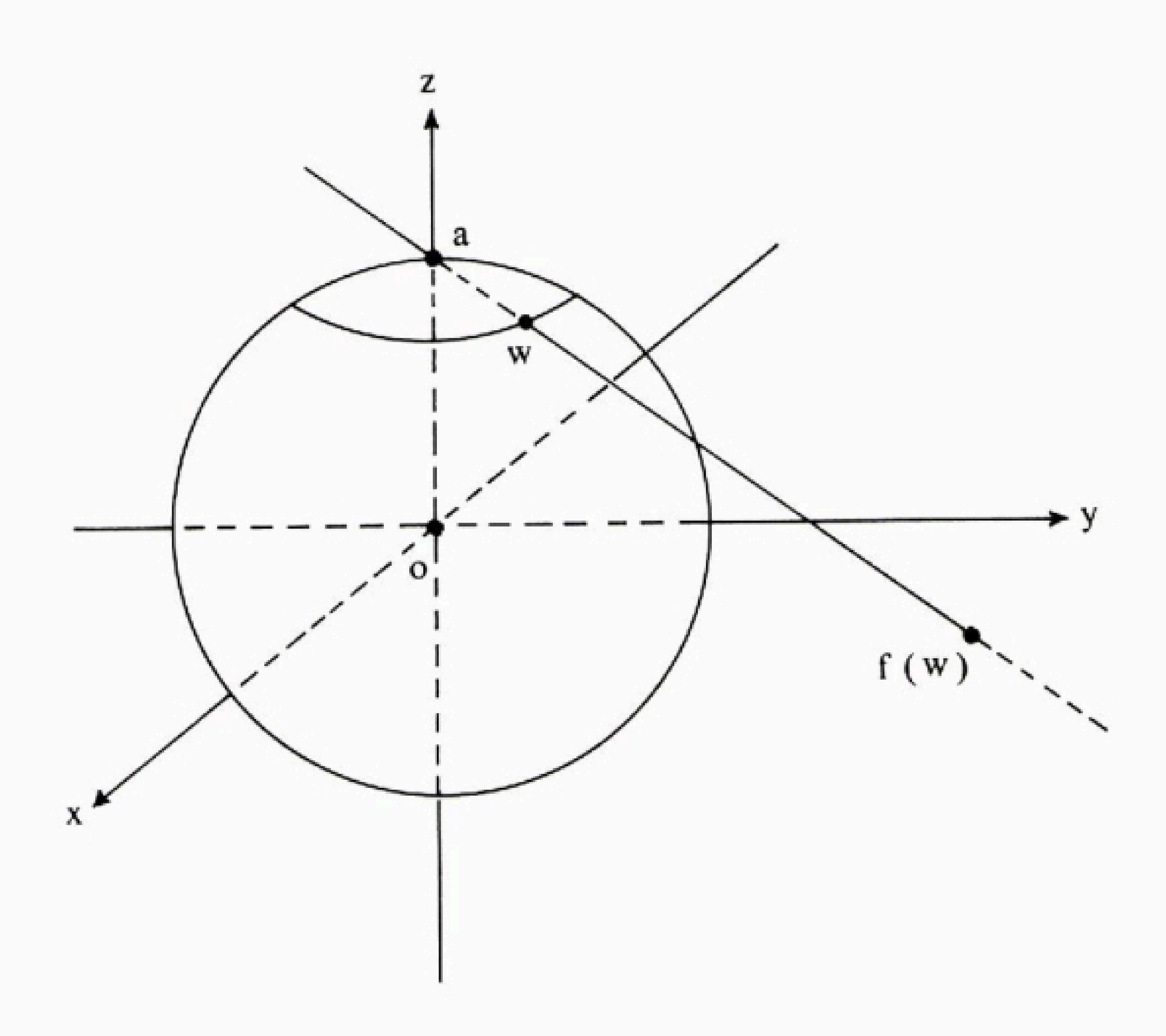
الشكل(٤,١) $\mathbf{R}^2$ فضاء متصل

٤,١٤ **مثال**. S^2 فضاء متصل: من أجل اثبات ذلك، لنأخذ $a=(0,0,1)$ (القطب الشمالي)، و $A_1=S^2-\{a\}$، و $A_2=S^2-\{-a\}$. لنلاحظ أن A_1 مكافىء تبولوجيا لـ R^2، بالاسقاط الجسامي[1]، وهو الراسم f الذي يرسل $w \in A_1$ إلى نقطة تقاطع المستوى xy مع المستقيم الذي يمر بالنقطتين a و w (الشكل ٤,٢). من السهل التحقق من أن $f:A_1 \to \mathbf{R}^2$ معرف تحليليا على النحو التالي:

(١) Stereographic projection

$$A_1 \ni (x, y, z) \forall , f(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y)$$

بحجة مماثلة، فإن A_z مكافىء أيضاً لـ R^2. من ثم، فكل من A_1 و A_z فضاء متصل (نظرية ٤,٥). استنادا إلى نظرية ٤,١٢، فإن S^2 فضاء متصل.



الشكل(٤,٢) الاسقاط الجسامي

نمضي الآن إلى الأسلوب الثاني، الذي يقوم على أخذ لصاقة فضاء جزئي متصل. وفي الحقيقة:

٤,١٥ **نظرية**. إذا كانت A مجموعة جزئية متصلة من فضاء تبولوجي X، و B مجموعة جزئية من X بحيث أن $A \subset B \subset \bar{A}$، فعندئذ B مجموعة متصلة في X.

البرهان. لنفرض جدلا أن (U,V) فصل للفضاء الجزئي B. بما أن A مجموعة متصلة، فإما أن A محتواة في U أو في V. لنفرض أن A محتواة في U. استنادا على تعريف الفضاء الجزئي، فهنالك مجموعة مغلقة U_1 في X بحيث أن $U = B \cap U_1$. إذن:

$$\begin{aligned} \bar{A} &\subset \overline{B \cap U_1} \\ &\subset \bar{B} \cap \bar{U_1} \\ &\subset \bar{A} \cap U_1 \end{aligned}$$

(اللصاقة هنا تؤخذ بالنسبة للفضاء X)، مما يعني أن **A** محتواة في U_1، ومن ثم، فإن B محتواة في U_1 إذن $B=B \cap U_1=U$، مما يتناقض مع افتراضنا أن (U,V) فصل لـ B. إذن B مجموعة متصلة في X. □

باستخدام المنطق الذي سقناه في مثال ٤,١٣، فبإمكاننا أن نثبت أن جداء فضاءين متصلين فضاء متصل، ومن ثم، فإن جداء أي عدد منته من الفضاءات المتصلة يكون متصلا. الآن نبيّن أن كل جداء لفضاءات متصلة يكون فضاء متصلا، ومن هنا، فإنه يكون لدينا أسلوب ثالث في استحداث الفضاءات المتصلة.

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فإن A كثيفة[1] في X إذا كانت لصاقة A تساوي X.

٤,١٦. **تمهيد**. ليكن $X=\prod_J X_j$ فضاء جداء. لتكن a نقطة ثابتة في X، و k نقطة ثابتة في J. حينئذ:

(أ) X_k مكافىء تبولوجيا للفضاء الجزئي A من X حيث

$$A = \{ x \in X : x(j) = a(j) , j \neq k \}$$

(ب) المجموعة $X_a = \{ x \in X : x(j) = a(j)$ لكل عناصر J ما عدا عددا منتهيا منها$\}$.
كثيفة في X.

البرهان:

(أ) نعرف $f : X_k \longrightarrow A$ على النحو التالي:

$$f(x_k)(j) = \begin{cases} a(j) & j \neq k \\ x_k & j = k \end{cases}$$

$\forall x_k \in X_k$ استنادا على نظرية ٣,٨، فإن f راسم مستمر، وعلاوة على ذلك، فمن الجلي أن مقصور p_k على A هو معكوس f. من ثم، فإن f تكافؤ تبولوجي.

(ب) كي نثبت أن X_a كثيفة في X، يكفي أن نبيّن أن كل B تنتمي إلى القاعدة المعتادة B_0 لتبولوجيا الجداء على X، تقاطع X_a. لتكن $B=P_{j_1}^{-1} U_{j_1} \cap \dots \cap P_{j_n}^{-1} U_{j_n} \in B_0$ نختار نقطة b_{j_k} في U_{j_k}، $1 \leq k \leq n$، ونعرف $y \in X$ على النحو التالي:

---

(١) Dense

$$y(j) = \begin{cases} a_j & j \neq j_k \\ b_{j_k} & j = j_k \end{cases}$$

حينئذ فإن $y \in X_a \cap B$.

٤,١٧ **نظرية**. إذا كان $X=\prod_J X_j$ جداء فضاءات متصلة، حينئذ يكون X متصلا.

البرهان. في ضوء نظرية ٤,١٥ وتمهيد ٤,١٦، فإنه يكفي أن نبيّن أن X_a مجموعة متصلة في X، لنقطة ما a في X. من أجل ذلك، نستخدم الاستقراء الرياضي على النحو التالي:

$\forall\ n \in N$، نعرف المجموعة:

$X_a^n = \{ x \in X : x(j) = a(j)$ لكل عناصر J ما عدا n أو أقل من تلك العناصر$\}$.

الآن نبين أن:

(i) X_a^1 مجموعة متصلة في X: لنفرض أن $x \in X_a^1$ من ثم، فهنالك $k \in J$ بحيث أن $j \neq k, x(j)=a(j)$. استنادا على تمهيد ٤,١٦، فالفضاء الجزئي $A_x = \{ y \in X : j \neq k, y(j)=a(j) \}$ من X مكافىء تبولوجيا لـ X_k، ومن ثم فهو متصل. الآن $X_a^1 = \bigcup_{X_a^1} A_x$ و $\bigcap_{X_a^1} A_x$ يحوي a. إذن X_a^1 مجموعة جزئية متصلة في X (نظرية ٤,١٢).

(ii) إذا كانت X_a^n مجموعة متصلة في $X, n \geq 1$، فهذا يستلزم أن X_a^{n+1} متصلة في X. كي نثبت هذه الدعوى، نفرض أن $b \in X_a^{n+1}$. إذن هنالك $j_1, \dots, j_{n+1} \in J$ بحيث أن $1 \leq k \leq n+1, j \neq j_k, b(j)=a(j)$. نعرف $c \in X_a^n$ كما يلي: $c(j)=b(j)$، $j \neq j_1$، و $c(j_1)=a(j_1)$. نلاحظ أن b و $c \in X_c^1$، و a و $c \in X_a^n$. بما أن X_c^1 و X_a^n مجموعتان متصلتان في X، وتتقاطعان، فإن اتحادهما مجموعة متصلة في X، تحوي a و b. من ثم، فإن X_a^{n+1} اتحاد مجموعات متصلة في X، تحوي كل واحدة منها a. إذن X_a^{n+1} مجموعة متصلة في X (نظرية ٤,١٢).

بالاستقراء الرياضي، فإن X_a^n مجموعة متصلة في $X, \forall n \in N$. إذن $X_a = \bigcup_N X_a^n$ مجموعة متصلة في X (نظرية ٤,١٢). □

٤–المركبات

تعريف. إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، فيقال إن A **مُركّبة**[١] لـ X إذا كانت A متصلة في X، ولا توجد مجموعة جزئية متصلة من X تحوي A تماما.

---

(١) Component

٤,١٨ **مثال**. كل مجموعة مكونة من عدد قياسي واحد هي مركبة للفضاء Q.

٤,١٩ **مثال**. للفضاء المعتاد $[0,1) \cup (1,2]$ مركبتان فقط، هما $[0,1)$ و $(1,2]$.

يترتب على نظرية ٤,١٥ أن كل مركبة تكون مجموعة مغلقة في الفضاء، وفي ضوء مثال ٤,١٨ فلا يلزم أن تكون المركبة مفتوحة في الفضاء.

٤,٢٠ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا، فحينئذ تشكل مجموعة مركبات X تجزيئا للمجموعة X.

البرهان. إذا كانت A و B مركبتين مختلفتين، وتتقاطعان، فتكون $A \cup B$ مجموعة متصلة تحوي A (نظرية ٤,١٢)، ومن ثم فإن $A = A \cup B$ إذن B مجموعة جزئية من A، و $A \neq B$، مما يتناقض مع الافتراض أن B مركبة لـ X. إذن A لا تقاطع B.

من جهة أخرى، إذا كانت $a \in X$، فحينئذ يكون اتحاد المجموعات الجزئية، المتصلة في X وتحوي a في ذات الوقت، مركبة لـ X. من ثم، فإن X تساوي اتحاد مركبات الفضاء X. □

٤,٢١ **نظرية**. إذا كان X و Y فضاءين متكافئين تبولوجيا فثمة تقابل بين مجموعة مركبات X ومجموعة مركبات Y.

البرهان. ليكن $f: X \to Y$ تكافؤا تبولوجيا. نعرف راسما f_1 من مجموعة مركبات X إلى مجموعة مركبات Y على النحو التالي: إذا كانت C_a المركبة التي تحوي $a \in X$، فتكون $f_1 C_a$ المركبة $C_{f(a)}$ التي تحوي f(a) في Y. من السهل التحقق من أنه إذا كانت $b \in C_a$، فحينئذ $f\,C_a = C_{f(b)} = C_{f(a)}$.

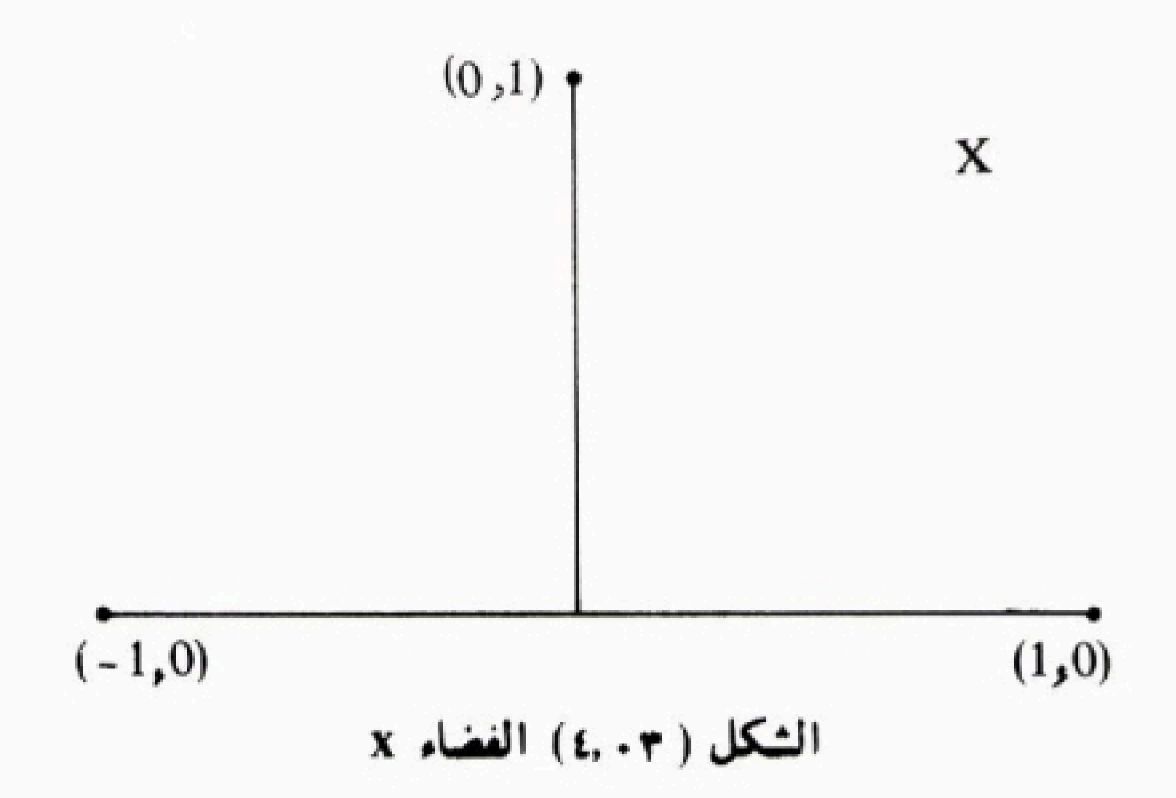
لنلاحظ الآن أن $(f^{-1})_1$ يكون معكوسا لـ f_1، ومن ثم فإن f_1 تقابلي. □

إذا أعطينا فضاءين تبولوجيين، فقد يتسنى لنا تقرير ما إذا كانا متكافئين تبولوجيا أم لا، باستخدام اعتبارات الاتصال، والمركبات، كما في المثال التالي:

٤,٢٢ **مثال**. الفضاء الجزئي X من R^2:

$$X = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$$

غير مكافىء تبولوجيا لأي فترة في R. لأنه إذا كانت A فترة في R، وفرضنا جدلا أن $f: X \to A$ تكافؤ تبولوجي، فحينئذ يكون $f|X - \{0\}$ تكافؤا تبولوجيا على $A - \{f(0)\}$. بيد أن لـ $X - \{0\}$ ثلاث مركبات، ولـ $A - \{f(0)\}$ مركبتين على الأكثر، مما يتناقض مع النظرية السابقة. إذن X غير مكافىء تبولوجيا لأي فترة في R.



الشكل (٤,٠٣) الفضاء X

ما دمنا قد تطرقنا للحديث عن المركبات، **فلا يفوتنا أن نشير إلى نظرية شهيرة**، في هذا الشأن، وهي نظرية المنحنى لجوردن[1]، والتي تنص على ما يلي: **إذا كان A فضاء جزئيا من R^2، مكافئا تبولوجيا لـ S^1، حينئذ للفضاء الجزئي R^2-A مركبتان فقط.**

قد يخطر للمرء، لأول وهلة، أنه أمام نظرية سهلة الاثبات. بيد أن هذا الخاطر بعيد عن الحقيقة، إذ أن A قد يكون معقد الشكل. وقد اكتشفت أخطاء في برهان جوردن نفسه (١٨٩٣م)، وأول برهان صحيح لها كان في عام ١٩٠٥م. والآن توجد براهين سهلة نسبيا لهذه النظرية باستخدام التبولوجيا الجبرية ([15] و [16]).

٥- الاتصال بالمسارات

يتعلق هذا الجزء بمفهوم ذي صلة بالاتصال، يسمى الاتصال بالمسارات. في هذا الصدد، نبحث أهم خواص الفضاءات المتصلة بالمسارات، والعلاقة بين الاتصال والاتصال بالمسارات.

تعريف. إذا كان X فضاء تبولوجيا، **فهو يكون متصلا بالمسارات**[2] إذا كان يستوفي الشرط التالي: إذا كانت x و $y \ni X$، فهنالك راسم مستمر $\sigma: I \to X$ بحيث أن $x=\sigma(0)$ و $y=\sigma(1)$. وفي هذه الحالة، يقال إن σ مسار[3] في X، من x إلى y.

٤,٢٣ مثال: R^n فضاء متصل بالمسارات، لأنه إذا كانت x و $y \ni R^n$، فحينئذ $\sigma: I \longrightarrow R^n$ حيث:

$$I \ni s \ \forall \ , \ \sigma(s) = (1-s).x + sy$$

مسار في R^n، من x إلى y.

---

(١) The Jordan curve theorem

(٢) Path-Connected

(٣) Path

إن الاتصال بالمسارات خاصة تبولوجية كما تبين النظرية التالية.

٤,٢٤ نظرية. إذا كان Y صورة مستمرة لفضاء متصل بالمسارات X، حينئذ يكون Y متصلا بالمسارات.

البرهان. ليكن $f:X \longrightarrow Y$ راسما مستمرا وغامرا. إذا كانت y_1 و $y_2 \in Y$، فثمة x_1 و $x_2 \in X$ بحيث أن $y_1 = f(x_1)$، و $y_2 = f(x_2)$. بما أن X متصل بالمسارات فهنالك مسار $\sigma: I \longrightarrow X$ بحيث أن $\sigma(0)=x_1$ و $\sigma(1)=x_2$. إذن $f_0\sigma$ مسار في Y من y_1 إلى y_2. من ثم فإن Y متصل بالمسارات. □

الآن نرمي إلى التحقق من صحة الدعاوى المماثلة لنتائج الجزء الثالث، فيما يتعلق بالاتصال بالمسارات. من أجل ذلك، نقدم أولا التعريف التالي:

تعريف. إذا كانت x و y و z نقاطا في فضاء تبولوجي X، و σ و μ مسارين في X من x إلى y، ومن y إلى z على التوالي، **فجداء**(١) σ و μ، ويرمز له بـ $\sigma.\mu$، هو المسار من x إلى z في X، المعرف على النحو التالي:

$$\sigma.\mu\ (s) = \begin{cases} \sigma\ (2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu\ (2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

بما أن مقصور $\sigma.\mu$ على كل من $[0, \frac{1}{2}]$، $[\frac{1}{2}, 1]$ راسم مستمر، فإن $\sigma.\mu$ راسم مستمر، وفق نظرية الالصاق.

٤,٢٥ نظرية. ليكن X فضاء تبولوجيا، و A_j فضاء جزئيا من X متصلا بالمسارات X، لكل j في عائلة مرقمة J، ليكن $\bigcap_j A_j$ غير خال. حينئذ يكون $\bigcup_j A_j$ فضاء جزئيا متصلا بالمسارات من X.

البرهان. نثبت نقطة $a \in \bigcap_j A_j$. إذا كانت x و $y \in \bigcup_j A_j$، فثمة j_1 و $j_2 \in J$ بحيث أن $x \in A_{j_1}$ و $y \in A_{j_2}$. ليكن σ مسارا في A_{j_1} من x الى a، و μ مسارا في A_{j_2} من a الى y. إذن $\sigma.\mu$ مسار في $\bigcup_j A_j$ من x الى y، ومن ثم، فإن $\bigcup_j A_j$ متصل بالمسارات. □

سوف يتبين فيما بعد أن لصاقة الفضاء الجزئي المتصل بالمسارات لا يلزم أن تكون متصلة بالمسارات.

٤,٢٦ نظرية. إذا كان $X = \pi_j X_j$ جداء فضاءات متصلة بالمسارات، حينئذ فإن X متصل بالمسارات.

---

(١) The product

البرهان. إذا كانت x و y ∋ X، فنختار مسارا σ_j في X_j من x(j) الى y(j), ∀ j ∋ J. الآن نعرف مسارا في X من x الى y على النحو التالي:

$$\sigma(s)(j) = \sigma_j(s), \quad \forall s \in I, \quad \forall j \in J$$

بما أن $P_j o \sigma = \sigma_j$، ∀ j ∋ J، فإن σ راسم مستمر. إذن X متصل بالمسارات. □

نترك للطالب مهمة تعريف المركبات المسارية(١)، وأن يبين أن المركبات المسارية تجزىء الفضاء، مسترشدا في ذلك بالجزء السابق.

الآن نبحث العلاقة بين الاتصال والاتصال بالمسارات. من السهل أن يبين أن الاتصال بالمسارات يستلزم الاتصال:

٤,٢٧ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا متصلا بالمسارات، فحينئذ يكون X متصلا.

البرهان. لنفرض جدلا أن X غير متصل و (U,V) فصل لـ X. لتكن x نقطة في U و y نقطة في V، و σ مسارا في X من x إلى y.

الآن σ (I) صورة مستمرة لفضاء متصل، ولذا فهو فضاء جزئي متصل من X. بيد أن σ (I) ∩ U و σ (I) ∩ V يشكلان فصلا لـ σ (I). ازاء هذا التناقض، نستنتج أن X فضاء متصل. □

ونبين عبر المثال التالي أن الاتصال لا يستلزم الاتصال بالمسارات.

٤,٢٨ **مثال**. ليكن X الفضاء الجزئي من R^2 حيث $X = A \cup B$,

$$A = \{(x, \sin 1/x) : 0 < x \leq 1\}$$ (الشكل (٤,٤))

و

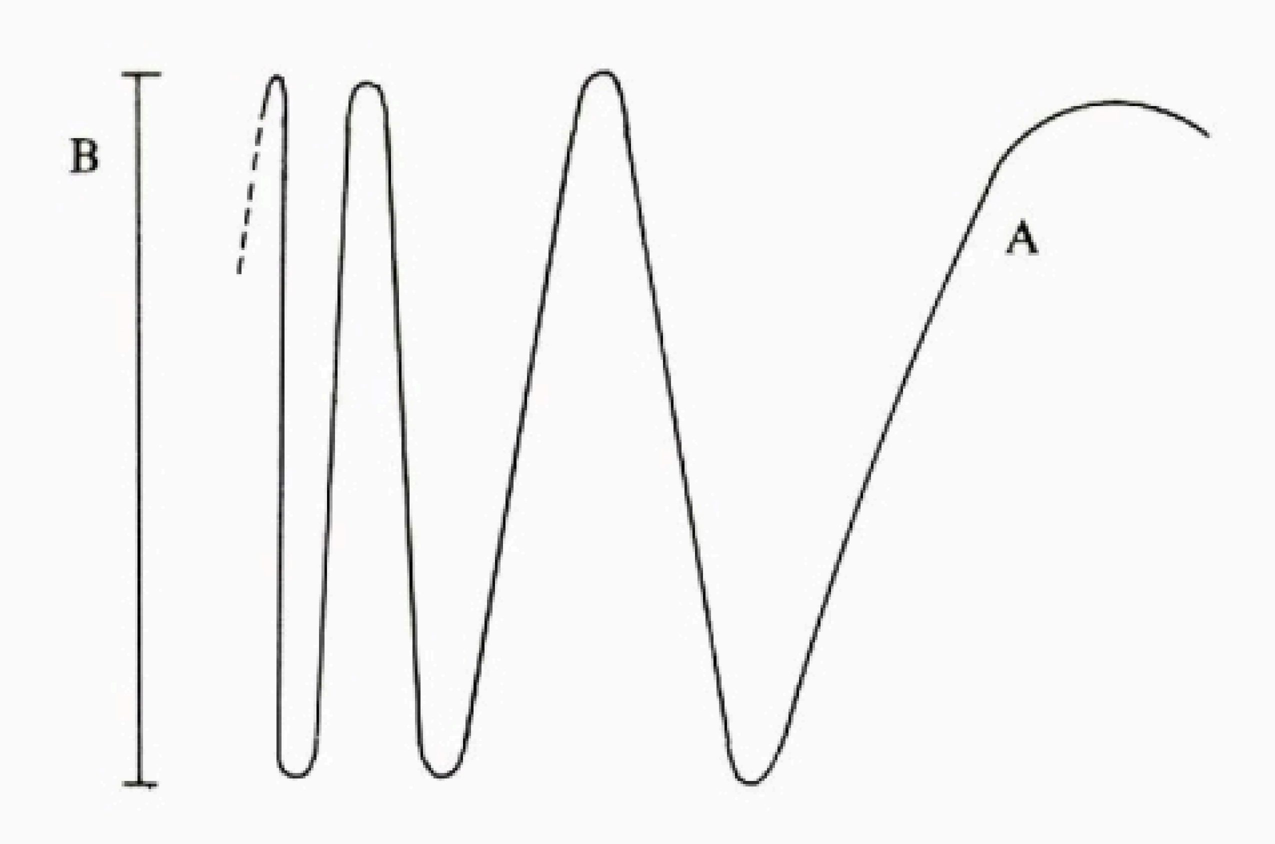
$$B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

بما أن (0, 1] فضاء متصل، و f:(0, 1] ⟵ X حيث $f(x) = (x, \sin 1/x)$, ∀ x ∋ (0, 1]، راسم مستمر، إذن A=f(0,1] مجموعة متصلة في X، ومن ثم، فإن $X = \bar{A}$ فضاء متصل (نظرية ٤,١٥).

الآن نثبت أن X غير متصل بالمسارات. لنفرض جدلا أن هنالك مساراً σ في X من (1 sin و 1) إلى (0,0). بما أن A مجموعة مفتوحة في X، فإن $\sigma^{-1} A = J$ مجموعة مفتوحة في I، وإذ أن σ (1) = (0,0) فيترتب على ذلك أن λ = حعا J لا تنتمي إلى J، أي أن σ (λ) ∋ B. نظراً لاستمرار σ عند λ، فثمة $\lambda_1 > \lambda$ بحيث

---

(١) Path-components



الشكل (٤،٠٤) فضاء متصل وغير متصل بالمسارات

أن $M=\sigma[\lambda_1,\lambda]$ محتواة في القرص المفتوح $B(\sigma(\lambda),1/4)$. يترتب على تعريف λ أنه توجد $t_0 \in [\lambda_1,\lambda]$ بحيث أن $z_0=\sigma(t_0) \in A$ ، ومن ثم فإن $M \cap A \neq \phi$. الآن توجد $x_0 \in (0,1)$ بحيث أن $z_0=(x_0 , \sin 1/x_0)$ بالنظر إلى سلوك الدالة $\sin 1/x$ قرب O ، يتضح أنه بإمكاننا اختيار x_1 بحيث أن $O<x_1<x_0$, $|\sin 1/x_1 - \sin 1/x_0| \geq 1$. إذن $z_1=(x_1 , \sin 1/x_1) \in M$ ، ومن ثم فإن:

$$U=\{(x,y) \in M : x<x_1\}$$

و $$V=\{(x,y) \in M : x>x_1\}$$

يشكلان فصلا لـ M . بما أن M صورة مستمرة للفضاء المتصل $[\lambda_1,\lambda]$. فهو إذن فضاء متصل. من ثم فإن افتراضنا أن X متصل بالمسارات، يقود إلى تناقض. إذن X غير متصل بالمسارات. □

في ضوء المثال السابق، تتضح نقطتان:

(أ) إذا كانت A مجموعة جزئية متصلة بالمسارات، فلا يلزم أن تكون $\bar{A}$ متصلة بالمسارات.

(ب) ليس من اللازم أن تكون المركبات المسارية للفضاء التبولوجي مغلقة فيه.

تمارين (٤)

الجزء الأول

١ – أثبت أن كلا من المجموعات الجزئية التالية من R^2 غير متصلة في R^2:

(i) Q^2

(ii) $\{(x,y): -1 \leq y \leq 1 ، و\ y \neq 0\}$

(iii) $\{(x,0); x \in R\} \cup \{(x,e^{-x}) : x \in R\}$

٢ – برهن أنه إذا كان X فضاء تبولوجيا ، فيكون متصلا إذا وإذا فقط لا يوجد راسم مستمر غير ثابت من X إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$.

٣ – لتكن $GL_n\ (R)$ مجموعة المصفوفات الحقيقية $n\times n$ القابلة للعكس. بين أنها مجموعة غير متصلة في الفضاء $M_n\ (R)$. (اعتبر مقصور الدالة det على $Gl_n\ (R)$).

٤ – أورد مثالا لفضاء تبولوجي فيه مجموعتان متصلتان ومتقاطعتان، بيد أن تقاطعها غير متصل.

الجزء الثاني

٥ – يقال إن الفضاء التبولوجي X يتمتع بخاصة النقطة الثابتة إذا كان لكل راسم مستمر $f: X \rightarrow X$ نقطة ثابتة.

برهن أنه إذا كان A فضاء جزئياً من R ، فهو يتمتع بخاصة النقطة الثابتة إذا وإذا فقط كانت A فترة مغلقة في R.

٦ – بين أنه إذا كانت $f: S^n \rightarrow R$ دالة مستمرة ، $n > 1$ ، فهنالك عدد لا نهائي من النقاط $x \in S^n$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$.

٧ – أثبت أن S^1 غير مكافىء تبولوجياً لأي فضاء جزئي من R.

الجزء الثالث

٨ – أثبت أن كلا من المجموعات التالية متصلة في R^2:

(i) $\{(x,y): x = \pm y\}$

(ii) $\{(x^2, \cos x): x \in R\}$

(iii) $\{(x, x \sin 1/x): x > O\} \cup \{(o,y): y \in R\}$.

٩ – برهن أن كلا من الفضاءين S^n P^n فضاء متصل $(n \geq 1)$.

١٠– أثبت أن $R^n - \{o\}$ فضاء متصل ، $\forall\ n > 1$. من ثم ، بين أن R^n غير مكافيء تبولوجياً لـ R ، $n > 1$.

الجزء الرابع

١١– برهن أنه إذا كان لفضاء تبولوجي X عدد منته من المركبات ، فحينئذ تكون كل منها مفتوحة في X.

١٢– بين أن الشكل 8 غير مكافيء تبولوجياً لـ S^1 (باعتبار 8 فضاء جزئياً من R^2).

١٣– قسم الحروف الأبجدية إلى فصول تكافؤ تبولوجي باعتبارها تمثل فضاءات جزئية من R^2.

الجزء الخامس

١٤– أثبت أن كلا من الفضاءات التالية متصل بالمسارات:

(i) $M_n(R)$ (ii) $(C(I), d_1)$ (iii) $(C(I), d_2)$ (iv) S^n ، $n > o$.

١٥– برهن أن كل مجموعة مفتوحة ومتصلة في R^n تكون متصلة بالمسارات.

١٦– بين أنه إذا كان X و Y فضاءين متكافئين تبولوجياً ، حينئذ فإن العدد الكاردينالي لمجموعة المركبات المسارية لـ X يساوي العدد الكاردينالي لمجموعة المركبات المسارية لـ Y.

الفصل الخامس

التراص (التلاحم)

Compactness

مقدمة

نبحث في هذا الفصل خاصة تبولوجية لها دور كبير في التبولوجيا والتحليل، وهي خاصة التراص. ويرجع الفضل في وضع تعريفها إلى الكزاندروف - ويوريسون[١]، ففي عام ١٩٢٤م، عرفا الفضاء المتراص على النحو التالي: إذا كان X فضاء تبولوجيا، فهو متراص إذا كان يحقق الشرط التالي: كلما كانت G مجموعة مشكلة من مجموعات مفتوحة في X، بحيث إتحاد عناصرها يساوي X، فثمة مجموعة جزئية منتهية من G بحيث أن إتحاد عناصرها يساوي X أيضاً.

لقد استمدا هذه الفكرة من نظرية هاين - بوريل[٢] المعروفة في التحليل الحقيقي، والتي من بين نتائجها الهامة النظرية التي تنص على أنه إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة [b و a]، فحينئذ تكون لـ f نقطة عظمى ونقطة صغرى على [b و a].

بجانب نظرية هاين - بوريل، يشتمل هذا الفصل على نظرية لها مكانة مرموقة في التبولوجيا والتحليل الدالي، وهي نظرية تيخونوف[٣]: إذا كان X جداء فضاءات متراصة، حينئذ يكون X متراصاً. لقد كانت هذه النظرية اسهاماً أصيلا بحق، فتطبيقاتها كثيرة، وبرهانها حتى في حالة الجداءات المنتهية ليس بالأمر البسيط. لذا فقد أفردنا لها الجزءين الثالث والرابع من هذا الفصل. وجدير بالذكر أن نشر هذه النظرية كان من أوجه الأسباب لتبني تعريف الكزاندروف - بوريسون للفضاء المتراص.

١- الفضاءات المتراصة

يتناول هذا الجزء تعريف الفضاء المتراص ونظرية هاين - بوريل.

---

(١) Alexandroff-Urysohn

(٢) Heine-Borel

(٣) Tychonoff's theorem

من أجل تعريف الفضاء المتراص، نقدم أولا الغطاءات المفتوحة والتي تشكل أداة هامة في الرياضيات، فتستخدم في التبولوجيا الجبرية في انشاء هومولوجياجك[١]، وتستخدم في تعريف الانتروبيا التبولوجية[٢]، هذا بجانب الاستفادة منها في تعريف التراص.

تعريف: إذا كان X فضاء تبولوجيا، و G مجموعة مشكلة من مجموعات مفتوحة في X بحيث أن إتحاد عناصر G يساوي X، فيقال حينئذ إن G **غطاء مفتوح**[٣] لـ X.

وإذا كانت H مجموعة جزئية منتهية من G، وتشكل غطاء مفتوحاً لـ X، فيقال إن H غطاء جزئي **منته**[٤] من G للفضاء X.

إذا كان X فضاء تبولوجيا، **فهو متراص**[٥] **(متلاحم)** إذا كان كل غطاء مفتوح لـ X يحوي غطاء جزئياً منتهياً لـ X.

٥,.١ **مثال**: كل فضاء تبولوجي منته هو فضاء متراص.

٥,.٢ **مثال**: إذا كان X فضاء متممة منتهية، فيكون فضاء متراصاً.

٥,.٣ **مثال**: R فضاء غير متراص، لأن $\{(-n, n) : n \in N\}$ غطاء مفتوح لـ R، ولا يحوي غطاء جزئياً منتهياً لـ **R**.

٥,.٤ **نظرية (نظرية هاين - بوريل)**. كل فترة مغلقة $[a, b]$ هي فضاء جزئي متراص من R.

البرهان: إذا كانت $a=b$، **فحينئذ تكون** $[a, b]$ فضاء النقطة الواحدة، **فهو** إذن فضاء متراص.

لنفرض الآن أن $a < b$. ليكن G **غطاء مفتوحاً** لـ $[a, b]$. نعرف المجموعة Y على النحو التالي:

$Y = \{y \in (a, b]$: توجد **مجموعة جزئية منتهية** من G بحيث أن اتحاد عناصرها يحوي $[a, y]\}$. لنلاحظ أن Y غير خالية، لأنه إذا كان $U \in G$ جواراً لـ a، ففي ضوء تعريف التبولوجيا النسبية على $[a, b]$، هنالك $y_0 > a$ بحيث أن $[a, y_0]$ محتواة في U، ومن ثم، فإن $y_0 \in Y$.

ليكن c = حعا Y. إذن $a < c \leq b$. الآن نثبت أن $c \in Y$. من أجل ذلك، نختار جواراً $V \in G$ لـ c. استناداً على تعريف التبولوجيا النسبية على $[a, b]$، فثمة $s < c$ بحيث أن $(s, c]$ محتواة في V. إذن توجد $y_1 \in Y \cap (s, c]$، مما يترتب عليه أن هنالك $G_1, \dots, G_n \in G$ بحيث أن $\bigcup_{1}^{n} G_i$ يحوي $[a, y_1]$. من ثم، فإن $\bigcup_{1}^{n} G_i \cup V$ يحوي $[a, c]$، ولذا فإن $c \in Y$.

---

(١) Cech

(٢) Topological entropy

(٣) Open cover

(٤) Finite subcover

(٥) compact

الآن نبين أن c=b. لو فرضنا جدلا أن $c > b$، فيكون بمقدورنا اختيار t بحيث أن $c < t < b$، و [c,t] محتواة في V، ومن ثم، فإن $t \in Y$، مما يتناقض مع تعريف c. إذن c=b، و [a,b] فضاء متراص. □

التراص خاصة تبولوجية، وفي الحقيقة:

٥,٥ نظرية: إذا كان Y صورة مستمرة لفضاء متراص، حينئذ يكون Y متراصاً.

البرهان: ليكن X فضاء متراصاً، و $f:X \to Y$ راسماً مستمراً وغامرا. ليكن $\mathcal{G} = \{G_j : j \in J\}$ غطاء مفتوحاً لـ Y. إذن $\{f^{-1} G_j : j \in J\}$ غطاء مفتوح لـ X، مما يترتب عليه وجود غطاء جزئي منته $\{f^{-1}G_1, ..., f^{-1}G_n\}$ للفضاء المتراص X. بما أن f راسم غامر، فإن $\{G_1, ..., G_n\}$ تشكل غطاء لـ Y. إذن Y فضاء متراص. □

نورد الآن خاصة مميزة للفضاءات المتراصة، سوف نستخدمها في برهان نظرية تيخونوف في الحالة العامة.

تعريف: إذا كانت S مجموعة من المجموعات، فيقال إنها تتمتع **بخاصة التقاطع المنتهي**(١) إذا كان تقاطع أي عدد منته من أعضاء S غير خال.

٥,٦ نظرية: يتكافأ الشرطان التاليان بالنسبة للفضاء التبولوجي

(أ) أن يكون متراصاً.

(ب) كلما كانت $\{F_j : j \in J\}$ مجموعة من المجموعات المغلقة في الفضاء، وتتمتع بخاصة التقاطع المنتهي، فحينئذ يكون $\bigcap_j F_j$ غير خال.

البرهان: نثبت أولا أن (أ) يستلزم (ب). لتكن $\mathcal{F} = \{F_j : j \in J\}$ مجموعة من المجموعات المغلقة في X، تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. لنفرض جدلا أن $\bigcap_j F_j = \phi$. إذن، وفق نظرية ديمورقن:

$$X = X - \bigcap_j F_j = \bigcup_j (X - F_j)$$

مما يجعل لدينا غطاء مفتوحاً، هو الغطاء $\{F_j^c : j \in J\}$. بما أن X فضاء متراص، فتوجد $n \in N$ بحيث أن $\{F_{j_1}^c, ..., F_{j_n}^c\}$ تشكل غطاء لـ X. باستخدام نظرية ديمورقن ثانية، نستنتج أن $\bigcap_i^n F_{j_i} = \phi$، مما يتناقض مع افتراضنا أن $\mathcal{F}$ تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. إذن $\bigcap_j F_j \neq \phi$.

بطريقة مشابهة، يمكن اثبات العكس. □

---

(١) The finite intersection property

٥,٧ استنتاج: إذا كان X فضاء متراصا، و (F_n) متوالية تناقصية من المجموعات المغلقة في X، و $F_n \neq \phi$، $\forall n \in N$، حينئذ $\bigcap_{1}^{\infty} F_n \neq \phi$

البرهان: $[F_n : n \in N]$ تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. □

٢- الفضاءات الجزئية المتراصة

نتعرض في هذا الجزء لأبرز سمات المجموعات الجزئية المتراصة في الفضاء، والتي سوف نستفيد منها في أمرين:

(أ) تحديد المجموعات الجزئية المتراصة في R^n، في الجزء التالي.

(ب) اثبات أن كل فضاء متراص وهاوسدورف يكون سويا، في الفصل السابع.

تعريف: إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من فضاء تبولوجي X، فيقال إن A **متراصة**[١] في الفضاء X إذا كان الفضاء الجزئي A متراصاً.

وإذا كانت G مجموعة من المجموعات المفتوحة في X بحيث أن إتحاد عناصرها يحوي A، فيقال إن G غطاء لـ A مفتوح في X.

استناداً على تعريف الفضاء الجزئي، إذن، فإن A تكون مجموعة متراصة في X إذا وإذا فقط كلما كان G غطاء لـ A مفتوحاً في X، فثمة غطاء جزئي منته من G لـ A.

٥,٨ نظرية: إذا كانت A مجموعة مغلقة غير خالية في فضاء متراص X، حينئذ تكون A مجموعة متراصة في X.

البرهان: ليكن G غطاء لـ A مفتوحاً في X. من ثم، فإن $G \cup \{A^c\}$ غطاء مفتوح للفضاء المتراص X. إذن هنالك غطاء جزئي منته G' من $G \cup [A^c]$ للفضاء X، مما يترتب عليه أن $G'-\{A^c\}$ غطاء جزئي منته من G لـ A. من ثم، فإن A مجموعة متراصة في X. □

إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي X، و U مجموعة مفتوحة في X وتحوي A، فيقال إن U جوار مفتوح لـ A.

٥,٩ نظرية: ليكن X فضاء هاوسدورف، ولتكن A مجموعة جزئية متراصة من X، و x عنصراً في متممة A. حينئذ يوجد جوار مفتوح U لـ A، وجوار مفتوح V لـ x بحيث أن U لا تقاطع V.

البرهان: بما أن X فضاء هاوسدورف، فلكل $a \in A$، يمكننا اختيار جوار مفتوح U_a للنقطة a،

---

(١) Compact

وجوار مفتوح V_a لـ x بحيث أن U_a لا يقاطع V_a. الآن تشكل المجموعة $\{U_a : a \in A\}$ غطاء لـ A مفتوحاً في X. بما أن A متراصة في X، فتوجد $a_1,...,a_n \in A(n \in N)$ بحيث أن $\overset{n}{\underset{1}{\cup}} U_{a_i}$ يحوي A. نضع $U = \overset{n}{\underset{1}{\cup}} U_{a_i}$، و $V = \overset{n}{\underset{1}{\cap}} V_{a_i}$، فنلاحظ أن U جوار مفتوح لـ A، و V جوار مفتوح لـ x ولا يتقاطعان. □

نستنتج من هذه النظرية، أن كل مجموعة متراصة في فضاء هاوسدورف تكون مغلقة.

٥،١٠ نظرية ليكن X فضاء هاوسدورف، و A و B مجموعتين متراصتين في X ولا تتقاطعان. حينئذ يوجد جواران مفتوحان U و V لـ A و B، بهذا الترتيب، بحيث أن U لا يقاطع V.

البرهان: استناداً على النظرية السابقة، فلكل $a \in A$، نختار جوارا مفتوحاً U_a لـ a وجوار مفتوحا V_a لـ B بحيث أن U_a لا يقاطع V_a. الآن $\{U_a : a \in A\}$ تشكل غطاء للمجموعة المتراصة A، مفتوحا في X. من ثم، فتوجد مجموعة جزئية منتهية $\{a_1,...,a_n\}$ من A بحيث أن $\overset{n}{\underset{1}{\cup}} U_{a_i}$ يحوي A. إذا وضعنا $U = \overset{n}{\underset{1}{\cup}} U_{a_i}$، و $V = \overset{n}{\underset{1}{\cap}} V_{a_i}$، فإن U و V جواران لـ A و B، على هذا الترتيب، ولا يتقاطعان. □

كتطبيق لما تقدم من نظريات في هذا الجزء، فإننا نسوق الاستنتاج التالي.

٥،١١ استنتاج: إذا كان $f : X \to Y$ تقابلا مستمراً من فضاء متراص X إلى فضاء هاوسدورف Y، حينئذ يكون f تكافؤاً تبولوجياً.

البرهان: علينا أن نثبت أن f^{-1} راسم مستمر. من أجل ذلك، نأخذ مجموعة مغلقة A في X، $A \neq \phi$. بما أن X فضاء متراص، إذن A مجموعة متراصة في X (نظرية ٥،٨). من ثم، فإن صورتها f(A) مجموعة متراصة في Y، مما يترتب عليه أن f(A) مغلقة في Y (نظرية ٥،٩). إذن f^{-1} راسم مستمر، ومن ثم فإن f تكافؤ تبولوجي. □

٣- نظرية تيخونوف [١] في عدد منته من الفضاءات

لقد فضلنا أن نعالج هذه الحالة الخاصة من نظرية تيخونوف، لأنه يتوفر لها برهان سهل وقصير نسبياً، ولا يتطلب استخدام مبدأ المجموعة العظمى، أو ما يكافئه من أدوات المنطق، كما هو الحال بالنسبة لبرهان الحالة العامة.

وعبر نظرية الانبوب، سوف يتسنى لنا اثبات نظرية تيخونوف في عدد منته من الفضاءات.

٥،١٢ نظرية (نظرية الانبوب)[٢]. ليكن X فضاء تبولوجياً، وليكن Y فضاء تبولوجياً متراصاً. لتكن

---

(١) Tychonoff

(٢) The tube theorem

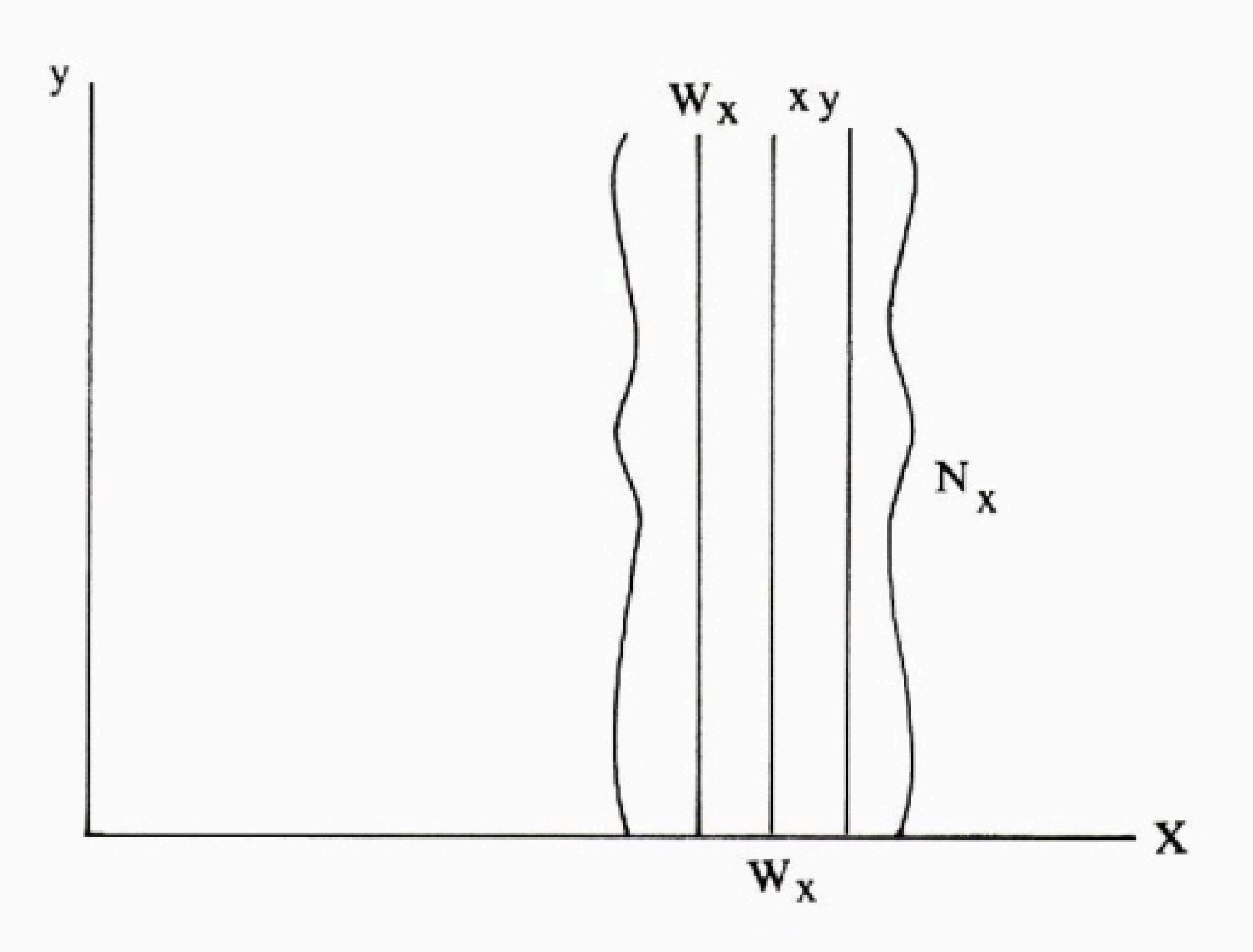
x_0 نقطة في X ، و N_0 جواراً مفتوحاً لـ x_0xY في فضاء الجداء XxY . حينئذ ثمة جوار مفتوح W لـ x_0 في X بحيث أن WxY محتواة في N_0.

البرهان: وفق تعريف تبولوجيا الجداء ، فهنالك تمثيل لـ N_0 على النحو التالي $N_0 = \bigcup_j U_j \times V_j$ ، حيث J مجموعة غير خالية ، U_j مجموعة مفتوحة في X ، و V_j مجموعة مفتوحة في Y, $\forall j \in J$. بما أن الفضاء الجزئي x_0xY مكافىء تبولوجيا لـ Y ، إذن x_0xY مجموعة متراصة في XxY . من ثم ، فهنالك عدد منته $j_1, ..., j_n$ من عناصر J بحيث أن $\bigcup_1^n U_{j_i} \times V_{j_i}$ يحوي $x_0 \times Y$, و $W = \bigcap_1^n U_{j_i}$ تحوي x_0. إذن W جوار مفتوح لـ x_0 في X ، وعلاوة على ذلك ، فإن $W \times Y$ محتواة في N_0. لأنه إذا كانت $(x,y) \in W \times Y$ ، فهنالك k بحيث أن $1 \leq k \leq n$ ، و$(x_0,y) \in U_{j_k} \times V_{j_k}$. إذن $y \in V_{j_k}$ ، ومن ثم ، فإن $(x,y) \in U_{j_k} \times V_{j_k}$. يترتب على ذلك أن $(x,y) \in N_0$. □

١٣،٥ نظرية (نظرية تيخونوف في عدد منته من الفضاءات). إذا كان $\prod_1^n X_j$ جداء عدد منته من الفضاءات المتراصة ، حينئذ فإن $\prod_1^n X_j$ فضاء متراص.

البرهان. نبرهن النظرية بأخذ n=2 ، وباستخدام الاستقراء الرياضي ، بعدئذ ، يمكن اثبات النظرية لأي عدد منته من الفضاءات.

نضع $X_1 = X$ ، و $X_2 = Y$. ليكن G غطاء مفتوحاً لـ $X \times Y$، ولنأخذ $x \in X$. بما أن $X \times Y$ فضاء متراص ، فثمة مجموعة جزئية منتهية G_x من G بحيث أن إتحاد عناصرها ، ولنسمه N_x ، يحوي $x \times Y$. استناداً على نظرية الأنبوب ، فهنالك جوار مفتوح W_x لـ x في X ، بحيث أن $W_x \times Y$ محتواة في N_x. الآن تشكل المجموعة $\{W_x : x \in X\}$ غطاء مفتوحاً للفضاء المتراص X ، مما يترتب عليه أن هنالك نقاطاً $x_1, ..., x_m, (m \in N)$



الشكل (٥،١) تقسيم x × y الى أنابيب

في X بحيث أن $\{W_{x_1},...,W_{x_m}\}$ غطاء لـ X. من ثم، فإن $G_{x_1} \cup ... \cup G_{x_m}$ غطاء جزئي منته من G لـ $X \times Y$.
إذن $X \times Y$ فضاء متراص. □

الآن نقوم بتحديد المجموعات المتراصة في R^n.

تعريف. إذا كانت $[a_1, b_1]$، ...، $[a_n, b_n]$ فترات مغلقة في R، قيل عن المجموعة $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ إنها مستطيل مغلق[1] في R^n.

إذا كانت A مجموعة جزئية من R^n، ويحويها مستطيل مغلق في R^n، فيقال إنها مجموعة **محدودة**[2].

٥,١٤ نظرية: إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من R^n، فلكي تكون متراصة، فإنه يلزم ويكفي أن تكون مغلقة ومحدودة في R^n.

البرهان:

أولا: نفرض أن A متراصة في R^n. بما أن R^n فضاء هاوسدورف، فإن A مغلقة في R^n (نظرية ٥,٩). من ناحية أخرى، فإن مجموعة الأقراص $B(O;n)$، $n \ni N$، تشكل غطاء لـ A مفتوحاً في R^n، مما يترتب عليه أن A محتواة في عدد منته، ومن ثم في واحد، من الأقراص المفتوحة $B(O;n)$. إذن A مجموعة محدودة.

ثانياً: نفرض أن A مغلقة ومحدودة في R^n. إذن A محتواة في مستطيل مغلق B في R^n. بما أن B جداء فترات مغلقة، فهو فضاء متراص (نظرية هاين - بوريل، ونظرية تيخونوف). بما أن A مغلقة في B، فهي مجموعة متراصة في B ومن ثم فهي متراصة في R^n (نظرية ٥,٨). □

التطبيق التالي تعميم لنظرية هامة في التحليل الحقيقي، كنا قد أوردنا نصها في مقدمة هذا الفصل.

٥,١٥ استنتاج: إذا كانت f دالة مستمرة على فضاء متراص X، فتوجد نقطتان a و b في X بحيث أن $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall x \ni X$.

البرهان: استناداً على نظرية ٥,٥، فإن $f(X)$ مجموعة متراصة في R، ومن ثم فهي مغلقة ومحدودة في R (نظرية ٥,١٤). إذن $f(X)$ تحوي حعا $f(X)$، وحسا $f(X)$. من ثم، فهنالك a و $b \ni X$ بحيث أن $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall x \ni X$. □

٤- نظرية تيخونوف (الحالة العامة)

قوام برهان نظرية تيخونوف في الحالة العامة، مبدأ من مبادىء المنطق، مكافىء لمسلمة الاختيار،

---

(١) Closed rectangle

(٢) Bounded

ويدعى: مبدأ المجموعة العظمى. وقبل أن نورده، نسوق بعض التعاريف المتعلقة به.

تعريف: إذا كانت لدينا مجموعة غير خالية X، وعلاقة $<$ على X، فيقال إن $<$ **علاقة ترتيب جزئي**[1] وإن X **مرتبة جزئياً بالعلاقة** $<$ إذا كانت $<$ تستوفي الشرطين التاليين:

(i) إذا كانت x و y في X، و $x < y$، فحينئذ لا تكون $x > y$.

(ii) $<$ علاقة متعدية: كلما كانت x و y و z في X، بحيث أن $x < y$، و $y < z$، فحينئذ $x < z$.

إذا كانت $<$ علاقة ترتيب جزئي على مجموعة غير خالية X، وكانت تستوفي الشرط التالي: كلما كان x و y عنصرين مختلفين في X، فإما أن $x < y$، أو $x > y$.

عندئذ يقال إن $<$ **علاقة ترتيب بسيط**[2] على X، وإن X **مرتبة ببساطة بالعلاقة** $<$.

مبدأ المجموعة العظمى[3]. لتكن لدينا مجموعة غير خالية X، وعليها علاقة ترتيب جزئي $<$. إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من X، ومرتبة ببساطة بالعلاقة $<$ فثمة مجموعة جزئية M من X، تستوفي الشروط التالية:

(أ) M تحوي A.

(ب) M مرتبة ببساطة بالعلاقة $<$.

(جـ) ليس ثمة مجموعة جزئية تحقق (أ) و(ب) وتحوي M تماماً.

استناداً على مبدأ المجموعة العظمى نستنتج:

٥,١٦ نظرية: ليكن X فضاء تبولوجياً، ولتكن F جماعة من المجموعات الجزئية من X، تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. حينئذ توجد جماعة G من المجموعات الجزئية من X بحيث أن G تحوي F، وتتمتع بخاصة التقاطع المنتهي، وليست هنالك جماعة أخرى من المجموعات الجزئية من X بحيث تحقق هذين الشرطين وتحوي G تماماً.

البرهان: لتكن $\Omega = \{F_j : j \in J\}$ المجموعة المشكلة من كل العناصر F_j حيث F_j جماعة من المجموعات الجزئية من X، تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي، وتحوي F. نعرف علاقة ترتيب جزئي $<$ على Ω على النحو التالي: $F_{j_2} > F_{j_1}$ إذا كانت F_{j_1} محتواة تماماً في F_{j_2}. حينئذ فمن الواضح أن $\{F\}$ مجموعة جزئية من Ω مرتبة ببساطة بالعلاقة $<$. استناداً على مبدأ المجموعة العظمى، فثمة مجموعة جزئية Ω' من Ω

---

(١) Partial order relation

(٢) Simple order relation

(٣) The maximum principle

بحيث أن Ω' تحوي $\{F\}$، و Ω' مرتبة ببساطة بالعلاقة $<$ ، ولا توجد مجموعة جزئية من Ω تحوي Ω' تماماً، وتكون مرتبة ببساطة بالعلاقة $<$. لتكن K عائلة مرقمة لـ Ω' ، ولتكن $\bigcup_k F_k = G$. الآن نلاحظ أن G تحقق الشروط التالية:

(أ) G تحوي F.

(ب) G تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي: ذلك لأنه إذا كانت $F_i \ni G$، $1 \leq i \leq n$، وكانت $F_1 \ni F_{k_1}, \ldots, F_n \ni F_{k_n}$ $(k_1, \ldots, k_n \ni K)$، اذن ثمة l بحيث أن $1 \leq l \leq n$، و F_{k_i} محتواة في F_{k_l}، $1 \leq i \leq n$. من ثم فإن $F_1, \ldots, F_n \ni F_{k_l}$، مما يترتب عليه أن $\bigcap_1^n F_i \neq \phi$.

(جـ) $G \ni \Omega$: بما أن F_k محتواة في G كلما كانت $F_k \ni \{G\} - \Omega$ من ثم، فإن $\{G\} \cup \Omega$ مجموعة جزئية من Ω ، وتحوي F، ومرتبة ببساطة بالعلاقة $<$. في ضوء تعريف Ω حينئذ، فإن $G \ni \Omega$.

(د) لتكن G' جماعة من المجموعات الجزئية من X، تستوفي الشرطين (أ)، و(ب). لنفرض جدلا أن G' تحوي G تماماً. يترتب على ذلك أن $G' \ni \Omega'$ ولذا فتكون G' محتواة في G. ازاء هذا التناقض، نستنتج أنه ليس ثمة G' تحقق الشرطين (أ) و(ب) وتحوي G تماماً. □

٥,١٧ استنتاج: إذا أخذنا X و F و G كما في النظرية السابقة، فحينئذ:

(i) G مجموعة مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

(ii) إذا كانت A مجموعة جزئية من X، بحيث تقاطع A كل عنصر في G، فعندئذ تكون A عنصراً في G.

البرهان:

(i) لنفرض أن $G_1, \ldots, G_n \ni G$، وأن $G_1 \cap \ldots \cap G_n = G_0$. إذا كانت $H_i \ni G$, $1 \leq i \leq m$، عندئذ $G_0 \cap H_1 \cap \ldots \cap H_m = G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap H_1 \cap \ldots \cap H_m$ فهي إذن مجموعة غير خالية. من ثم، فإن $G_0 \ni G$.

(ii) إذا كانت $G_1, \ldots, G_n \ni G$، فإن:

$$A \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n = A \cap (G_1 \cap \ldots \cap G_n)$$

فهي مجموعة غير خالية، لأن $G_1 \cap \ldots \cap G_n \ni G$، استناداً على (i). إذن $A \ni G$. □

٥,١٨ (نظرية تيخونوف)[١]. إذا كان $X = \prod_j X_j$ جداء فضاءات متراصة، حينئذ يكون X فضاء متراصاً.

---

(١) Tychonoff's theorem

البرهان: لتكن $\mathcal{F}$ جماعة من المجموعات المغلقة في X، تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. يترتب على نظرية ٥,١٦ أن هنالك جماعة $G = \{G_k : k \in K\}$ من المجموعات الجزئية من X بحيث أن G تحوي F، وتتمتع بخاصة التقاطع المنتهي، وفضلا عن ذلك فلا توجد جماعة من المجموعات الجزئية من X تستوفي هذين الشرطين وتحوي G تماماً.

إذا أخذنا عنصرا $i \in J$، واعتبرنا جماعة المجموعات المغلقة في X_i التالية $\{P_i G_k : k \in K\}$، حيث $p_i : X \to X_i$ الاسقاط الطبيعي، فمن الواضح أنها تتمتع بخاصة التقاطع المنتهي. بما أن X_i فضاء متراص، فيمكننا أن نختار $x_i \in \bigcap_k P_i G_k$ (نظرية ٥,٦). نعرف $x \in X$ بأنها النقطة:

$$x(j) = x_j, \forall j \in J.$$

نمضي الآن لنثبت أن $x \in \bigcap_F F$. لنفرض أن U_j جوار مفتوح لـ x_j في X_j. حينئذ، فإن U_j يقاطع $P_j G_k, \forall k \in K$، مما يترتب عليه أن $P_j^{-1} U_j$ يقاطع $G_k, \forall k \in K$. استناداً على استنتاج ٥,١٧، فإن $P_j^{-1} U_j \in G$. بما أن G مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي، إذن كلما كانت $j_1, \dots, j_n \in J\ (n \in N)$، و U_i جواراً مفتوحاً لـ x_{j_i} في X_{j_i}، $1 \leq i \leq n$، فإن $P_{j_1}^{-1} U_1 \cap \dots \cap P_{j_n}^{-1} U_n \in G$. يترتب على ذلك، أن كل جوار مفتوح U لـ x في X يقاطع كل عنصر من G. بصفة خاصة، فإن U تقاطع F، $\forall F \in \mathcal{F}$. من ثم، فإن $x \in F, \forall F \in \mathcal{F}$. بما أن عناصر F مجموعات مغلقة، فإن $x \in \bigcap_F F$. يترتب على نظرية ٥,٠٦ أن X فضاء متراص. □

مما يجدر ذكره، أن كلي[1] قد أثبت (١٩٥٠م) أن نظرية تيخونوف تستلزم مسلمة الاختيار، ومن ثم فهما متكافئتان.

كنا قد ألمحنا إلى وجود تطبيقات كثيرة لنظرية تيخونوف، فمن بين هذه التطبيقات: رص ستون – جك[2]، وتصنيف الفضاءات المنتظمة تماماً[3] فليرجع القارىء المهتم بهذا الموضوع إلى [9] أو [10].

---

(١) Kelley

(٢) Stone-Cech compactification

(٣) Completely regular

تمارين (٥)

الجزء الأول

١ – أثبت أنه إذا كان X متراصاً، فلا يكون نطاقاً لدالة مستمرة غامرة $f: X \to R$.

٢ – أعطِ مثالا لمتوالية (f_n) من المجموعات المغلقة في R، بحيث تتمتع المجموعة $\{F_n : n \in N\}$ بخاصة التقاطع المنتهي، بيد أن $\bigcap_N F_n = \phi$.

٣ – برهن أن (R^2, U) حيث U التبولوجيا المولدة بالمستطيلات النصف مغلقة – مفتوحة، غير متراص.

الجزء الثاني

٤ – ليكن X الفضاء الجزئي من R^2:

$$X = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

لتكن Ω علاقة التكافؤ التالية على R^2: $(x^1, 1) \sim (x,0)$ إذا كانت $x = x^1$، و $0 < x < 1$. بين أن هنالك فضاءين جزئيين متراصين من $X/\sim$ بحيث أن تقاطعهما فضاء جزئي غير متراص.

٥ – أثبت أنه إذا كان X فضاء تبولوجيا، فاتحاد أي عدد منته من المجموعات المتراصة في X، يكون مجموعة متراصة في X.

٦ – برهن أن كل راسم مستمر وغامر من فضاء متراص إلى فضاء هاوسدورف هو ر. حـ .ق.

٧ – ليكن X فضاء متراصاً وهاوسدورف، و Y فضاء تبولوجيا، و $p: X \to Y$ ر. حـ . ق. برهن أن Y يكون هاوسدورف إذا وإذا فقط كان p راسماً مغلقاً.

٨ – أثبت أن $S^1 \times S^1$ مكافيء تبولوجيا لـ $R^2 / \sim$، حيث $\sim$ علاقة التكافؤ: $a \sim b$ إذا كانت $a - b \in Z \times Z$.

الجزء الثالث:

٩ – برهن أن (i) S^n (ii) P^n (iii) $S^1 \times S^1$ فضاءات متراصة.

١٠ – بين أن $GL_n(R)$ غير متراص.

١١ – اعتبر المجموعة المفتوحة N_0 من R^2 التي تحوي كل النقاط الواقعة بين المنحنيين:

$$y = \pm \frac{1}{x} \quad (x \neq o)$$

بيّن أن N_0 جوار لـ $O \times R$ في R^2، بيد أنه لا يوجد جوار W لـ O في R بحيث تكون المجموعة $W \times R$ محتواة في N_0.

الفصل السادس

التمام والتراص في الفضاءات المترية

Completeness and Compactness in Metric Spaces

مقدمة

يكون الفضاء المتري تاماً إذا كانت كل متوالية كوشي[١] فيه متوالية تقاربية. وأهم سمات الفضاء المتري التام تتمثل في نظرية بير[٢] القيّمة، والتي تنص على ما يلي: إذا كان X فضاء متريا تاماً، وإذا كانت (F_n) متوالية من المجموعات الجزئية المغلقة في X بحيث أن $F_n^{\circ} = \phi, \forall n \in N$، حينئذ فإن $(\bigcup_{1}^{\infty} F_n)^{\circ}$ يساوي ϕ أيضاً.

وتطبيقات نظرية بير عديدة في التبولوجيا والتحليل الدالي. وكمثال على ذلك، فسوف نثبت أنه لا توجد دالة $f:R \longrightarrow R$ بحيث تكون f مستمرة عند كل نقطة قياسية، وغير مستمرة عند أي من النقاط اللاقياسية.

والتمام، في الفضاء المتري، وثيق الصلة بالتراص. وبوجه التحديد، فسوف نبرهن أن الشروط الآتية تتكافأ بالنسبة للفضاء المتري:

(أ) أن يكون متراصاً.

(ب) أن يتمتع بخاصة بولزانو - وايرستراس[٣].

(جـ) أن يكون متراصاً بالتوالي.

(د) أن يكون تاماً ومحدوداً كلياً.

ولسوف نثبت أيضاً استنتاجاً بالغ الأهمية للنظرية السابقة، وهو ما يعرف بتمهيد الغطاء للبيق[٤]،

---

(١) Cauchy

(٢) Baire

(٣) Bolzano-Weierstrass

(٤) Lebesgue

وينص على أنه إذا كان G غطاء مفتوحاً لفضاء متري متراص X، فهنالك $\delta > 0$ بحيث أن كل مجموعة جزئية A من X، قطرها أقل من δ ، تكون محتواة في أحد عناصر G.

واعتماداً على هذه النظرية، نبرهن تعميماً للنظرية المعروفة: إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة، حينئذ تكون f مستمرة بانتظام.

١- الفضاءات التامة

تعريف. ليكن (X,d) فضاء مترياً، و(x_n) متوالية في X. يقال إن (x_n) **متوالية كوشي**[١] في X إذا استوفت الشرط التالي:

إذاكانت $\varepsilon > 0$، فحينئذ يوجد عدد طبيعي m بحيث أن

$$d(x_n,x_p) < \varepsilon, \forall n, p \geq m$$

إذا كان X فضاء مترياً، فيقال إنه تام[٢] إذا كانت كل متوالية كوشي في X تقاربية في X.

٦,١ **مثال**. إذا كان X فضاء مترياً تافهاً، حينئذ يكون X فضاء تاماً. لنبين ذلك، نتذكر أن المترك التافه على X يُعرّف كما يلي: $d(x,y) = 0$ إذا كانت $x=y$، و$d(x,y) = 1$ عندما $x \neq y$. من ثم، إذا كانت لدينا متوالية كوشي (x_n) في X، فثمة $m \in N$ بحيث أن $x_n = x_m, \forall n \geq m$. إذن (x_n) تؤول إلى x_m.

كي يتسنى لنا تقديم أمثلة غير تافهة للفضاء التام، فإننا نحتاج لأن نتطرق أولا لخاصة بولزانو - وايرستراس.

تعريف. إذا كان X فضاء تبولوجيا، فيقال إنه **يتمتع بخاصة بولزانو - وايرستراس**[٣] إذا كان لكل مجموعة جزئية لانهائية من X نقطة نهاية.

٦,٢ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا متراصاً، حينئذ فإن X يتمتع بخاصة بولزانو - وايرستراس.

البرهان. لنفرض جدلاً أن A مجموعة جزئية، لا نهائية، من X، وليست لها نقطة نهاية. حينئذ لكل $x \in X$، جوار مفتوح N_x بحيث أن N_x لا يقاطع A أو يقاطع A في النقطة x فقط. استناداً على تراص X، فثمة عدد منته من نقاط X: $x_1,...,x_n$ بحيث أن $\{N_{x_1},...,N_{x_n}\}$ غطاء مفتوح لـ X. من ثم، فإن A محتواة في المجموعة $\{x_1,...,x_n\}$، مما يتناقض مع افتراضنا أن A مجموعة لا نهائية. إذن X يتمتع بخاصة بولزانو - وايرستراس. □

---

(١) Cauchy sequence

(٢) Complete

(٣) The Bolzano-Weierstrass property

في بقية هذا الفصل، نختصر بولزانو - وايرستراس إلى ب-و.

٦,٣ **نظرية**. R^n فضاء تام.

البرهان. ليكن d المترك المعتاد على R^n. لتكن (x_i) متوالية كوشي في X. إذا كانت $A = \{x_i : i \in N\}$ مجموعة منتهية، فمن الجلي، عندئذ، أنه ثمة $m \in N$ بحيث أن $x_i = x_m, \forall i \geq m$ ولذا فإن (x_i) متوالية تقاربية تؤول إلى x_m.

إذا فرضنا الآن أن A مجموعة لا نهائية، فحينئذ تكون A مجموعة محدودة، ويتبين ذلك مما يأتي: بما أن (x_i) متوالية كوشي، فثمة عدد طبيعي m بحيث أن $d(x_i,x_j) < 1, \forall i$ و $j \geqslant m$. ليكن k أكبر عدد في $\{d(x_i,x_j) : i,j \leq m\}$. إذن، أياً كان i و $j \in N$، فإن $d(x_i,x_j) \leq d(x_i,x_m) + d(x_m,x_j)$ ولذا فإن $d(x_i,x_j)$ أقل أو يساوي لأكبر العددين: 2، و2K. إذن A مجموعة محدودة.

ليكن B مستطيلاً مغلقاً يحوي A. بما أن B فضاء متراص (استنتاج ٥,١٤)، فإنه يتمتع بخاصة ب-و (نظرية ٦,٢) ولذا فإن لـ A نقطة نهاية $x \in B$. نثبت الآن أن (x_i) تؤول إلى x. إذا كانت $\varepsilon > 0$، فثمة $m_0 \in N$ بحيث أن $d(x_i,x_j) < \frac{\varepsilon}{3}$، $\forall i,j \geq m_0$. من ناحية أخرى، واستناداً على تعريف نقطة النهاية، فيمكننا اختيار $j_0 > m_0$ بحيث أن $d(x,x_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. إذن، $\forall i \geqq m_0$ فإن:

$$d(x,x_i) \leqq d(x,x_{j_0}) + d(x_{j_0},x_i)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

إذن (x_i) تؤول إلى x.

من ثم فإن R^n فضاء تام. □

قد نتساءل الآن: هل التام خاصة تبولوجية؟ والإجابة هي: أنه خاصة مترية، وليس خاصة تبولوجية. فلنعتبر مثلاً الفضاء (0و1) في حين أن (0و1) مكافىء تبولوجيا للفضاء التام R، فإن المتوالية: $x_n = \frac{1}{n}, n = 1,2,...$ متوالية كوشي في (0و1)، بيد أنها ليست تقاربية في هذا الفضاء.

والمثال الذي مر يشير أيضاً إلى حقيقة أخرى، وهي أن تمام الفضاء المتري لا يستلزم تمام كل فضاءاته الجزئية. وبوجه التحديد، فلدينا:

٦,٤ **نظرية**. إذا كان X فضاء متريا تاماً، وA فضاء جزئياً من X، فلكي يكون A تاماً فإنه يلزم ويكفي أن تكون A مغلقة في X.

البرهان. ليكن A فضاء جزئياً تاماً من X. لتكن x نقطة نهاية لـ A. إذن لكل $n \in N$، نستطيع أن

نختار نقطة $x_n \in A \cap B(x;\frac{1}{n})$ الآن (x_n) متوالية كوشي في A ، وتؤول إلى x . نظراً لتام A ، فإن $x \in A$.
إذن A مغلقة في X .

وبالعكس ، إذا كان A فضاء جزئياً مغلقاً في X ، و(x_n) متوالية كوشي في A ، فثمة x تنتمي إلى الفضاء التام X بحيث أن x نهاية (x_n). من هنا ، فإما أن $\{x_n : n \in N\}$ مجموعة منتهية تحوي x ، أو أنها مجموعة لا نهائية وx نقطة نهاية لها . وفي كل ، فإن $x \in A$ ، مما يترتب عليه أن A فضاء تام . □

٢- نظرية بير[١]

في هذا الشأن ، نثبت نظرية التقاطع لكانتر[٢]، ومنها نستنتج نظرية بير .

تعريف . إذا كان لدينا فضاء متري (X,d) ، ومجموعة جزئية محدودة (يحويها قرص مغلق) غير خالية A من X ، فنعرف **قطر**[٣] A ، ونرمز له بـ $d(A)$ ، على النحو التالي:

$d(A) = \{d(a,b): a,b \in A\}$ حعا.

٦,٥ **نظرية (نظرية التقاطع لكانتر[٤])**. ليكن X فضاء مترياً تاماً . لتكن (F_n) متوالية تناقصية من المجموعات المغلقة ، غير الخالية ، في X ، بحيث أن $d(F_n)$ يؤول إلى 0 عندما تؤول n إلى ∞ . حينئذ يكون $\bigcap_1^\infty F_n$ مجموعة وحيدة العنصر .

البرهان. بما أن $d(F_n)$ يؤول إلى 0 ، فإما أن $\bigcap_1^\infty F_n$ خال ، أو يحوي نقطة وحيدة .

نبين الآن أن $\bigcap_1^\infty F_n$ غير خال . نختار $x_n \in F_n$ ، $\forall n \in N$. بما أن $x_p \in F_n, p \geq n$ ، و$d(F_n)$ يؤول إلى 0 ، فإن (x_p) متوالية كوشي في X . إذن (x_p) تؤول إلى نقطة x في X ، لأن X فضاء تام . الآن نثبت أن $x \in \bigcap_1^\infty F_n$. إذا ثبّتنا عدداً طبيعياً m ، فحينئذ $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\}$ متوالية كوشي في الفضاء الجزئي المغلق F_m .
في ضوء نظرية ٦,٤ ، فالفضاء F_m فضاء تام ، مما يترتب عليه أن المتوالية (x_{m+p}) تؤول إلى نقطة y في F_m .
من السهل بيان أن y=x ، ولذا فإن $x \in F_m, \forall m \in N$. □

٦,٦ **تمهيد** . ليكن X فضاء مترياً ، وF مجموعة جزئية مغلقة في X بحيث أن $F^o = \phi$. حينئذ كل مجموعة جزئية مفتوحة في X ، غير خالية ، تحوي قرصاً مفتوحاً لا يقاطع F .

البرهان. لتكن U مجموعة جزئية مفتوحة في X . لنفرض جدلاً أنه أياً كانت $x \in U$ ، فإن كل قرص

---

(١) Baire

(٢) Cantor

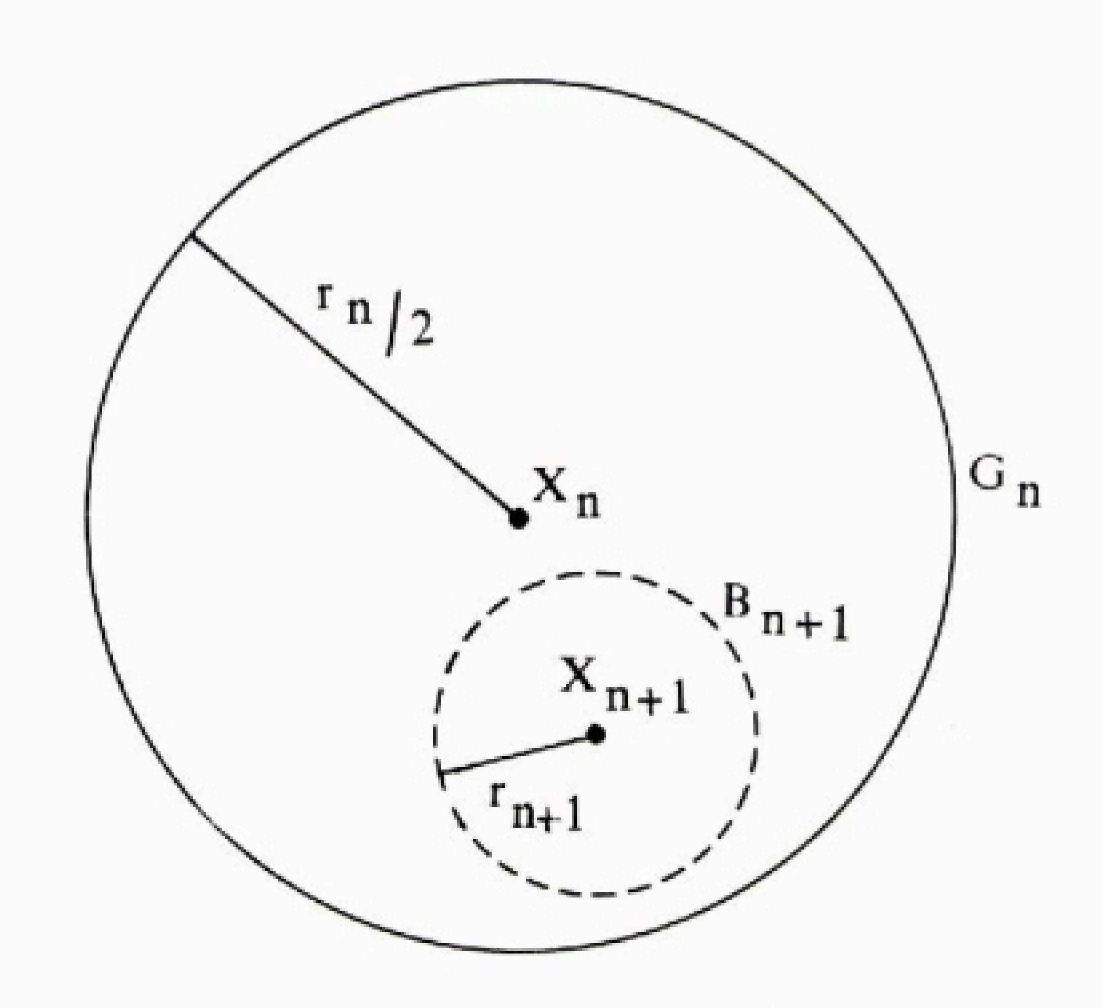
(٣) The diameter

(٤) The Cantor intersection theorem

مفتوح مركزه x ومحتوى في U يقاطع F. إذن $x \in F$، أو x نقطة نهاية لـ F. بما أن F مغلقة، إذن $x \in F$، في أي من الحالتين. هذا يستلزم أن U مجموعة جزئية من F، مما يتناقض مع فرضية النظرية، والتي تنص على أن $F^o = \phi$. إذن كل مجموعة جزئية مفتوحة في X، غير خالية، تحوي قرصاً مفتوحاً لا يقاطع F. □

٦,٧ نظرية (نظرية بير)[١]. إذا كان X فضاء مترياً تاماً، وF_n مجموعة جزئية مغلقة في X بحيث أن $F_n^o = \phi, \forall n \in N$، فحينئذ $(\bigcup_1^\infty F_n)^o = \phi$.

البرهان. لتكن x نقطة في X، و$B(x;r)$ قرصاً مفتوحاً مركزه x $(r>0)$. نهدف، فيما يلي، إلى الحصول على نقطة في $B(x;r)$، لا تنتمي إلى $\bigcup_1^\infty F_n$. بما أن $F_1^o = \phi$، فاستناداً على التمهيد أعلاه ثمة قرص مفتوح $B_1 = B(x_1;r_1)$ يحويه $B(x;r)$، وB_1 لا يقاطع F_1. لتكن $G_1 =$ لصاقة $B(x_1;r_1/_2)$. بما أن $F_2^o = \phi$، فثمة قرص مفتوح $B_2 = B(x_2;r_2)$، يحويه $B(x_1;r_1/_2)$، ولا يقاطع F_2. لتكن $G_2 =$ لصاقة $B(x_2;r_2/_2)$. بنفس الطريقة، فثمة قرص مفتوح $B_3 = B(x_3;r_3)$، محتوى في $B(x_2;r_2/_2)$، ولا يقاطع F_3. نعرف $G_3 =$ لصاقة $B(x_3;r_3/_2)$.



الشكل(٦,١) العلاقة بين G_n و B_{n+1}.

إذا سرنا على هذا المنوال، تكون لدينا متوالية من المجموعات المفتوحة (B_n)، ومتوالية من المجموعات المغلقة (G_n) بحيث أن

$$B_1 \supset G_1 \supset B_2 \supset G_2 \supset B_3 \supset \ldots$$

و $d(G_n) \leq \frac{r}{2^{n-1}}$. باستخدام نظرية التقاطع لكانتر، فإن $\bigcap_1^\infty G_n$ يحوي نقطة واحدة y. إذن $\bigcap_1^\infty B_n = \{y\}$. الآن، B_n لا تقاطع أياً من $F_1, \ldots, F_n$ $(n = 1,2,\ldots)$، ولذا فإن B_n لا تقاطع $\bigcup^n F_i$ بما أن $y \in B_n, \forall n \in N$،

---

(١) Baire's Category theoren or Baire's theorem

إذن y لا تنتمي إلى $\bigcup_{1}^{\infty} F_n$. من ثم، أياً كانت $x \in X$، فليس ثمة جوار مفتوح لها تحويه المجموعة $\bigcup_{1}^{\infty} F_n$. إذن داخل $\bigcup_{1}^{\infty} F_n$ يساوي المجموعة الخالية. □

ملاحظات

١ . ثمة نص مكافىء لنظرية بير، هو:

إذا كان X فضاء مترياً تاماً، وU_1, U_2، ... مجموعات جزئية مفتوحة كثيفة في X، فحينئذ $\bigcap_{1}^{\infty} U_n$ مجموعة كثيفة في X.

وتكافؤ النصين يترتب على المتطابقة:

داخل متممة A = متممة لصاقة A.

٢ . يقال إن الفضاء التبولوجي X **فضاء بير**[1] إذا كان يحقق الشرط التالي:

كلما كانت (F_n) متوالية من المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاء X، بحيث أن $F_n^{\circ} = \phi, \forall n \in N$، فإن $(\bigcup_{1}^{\infty} F_n)^{\circ} = \phi$.

إذن تنص نظرية بير على أن كل فضاء متري تام يكون فضاء بير. ولعلنا نتساءل: إذا كان X فضاء بير، وقابلاً للتعبير المتري، فهل يكون تاماً؟ الإجابة: لا، لأنه إذا كان X فضاء بير، فكذلك كل فضاء مكافىء له. الآن بينا $(0,1)$ $(\cong R)$ فضاء بير، لكنه ليس فضاء تاماً.

قبل أن نمضي إلى تطبيق نظرية بير، فإننا نحتاج إلى:

٦,٨ **تمهيد**. إذا كانت لدينا دالة $f: R \to R$، فحينئذ ثمة تمثيل للمجموعة $W = \{x : x \in R$، و f مستمرة عند $x\}$ على النحو التالي:

$W = \bigcap_{1}^{\infty} W_n$، حيث W_n مجموعة جزئية مفتوحة في $R, \forall n \in N$.

البرهان. نعرف W_n، لكل عدد طبيعي n، بأنها مجموعة الأعداد الحقيقية التي تستوفي الشرط التالي: $x \in W_n$ إذا كان ثمة جوار مفتوح U للنقطة x بحيث أن $|f(y)-f(z)| < \frac{1}{n}$، كلما كانت y و$z \in U$. من الجلي، أن W_n مفتوحة في R، وأن f مستمرة عند $x \in R$ إذا وإذا فقط $x \in W_n, \forall n \in N$. □

الآن نسوق التطبيق الذي أشرنا إليه في المقدمة.

٦,٩ **استنتاج**. ليس ثمة دالة $f: R \to R$ بحيث تكون f مستمرة عند كل نقطة قياسية، وغير مستمرة عند أي من النقاط اللاقياسية.

---

(١) Baire space

البرهان. لنفرض جدلاً أن الاستنتاج غير صحيح، وثمة دالة $f:R \to R$ بالوصف أعلاه. استناداً على تمهيد ٦,٨ ،فثمةتعبير لمجموعة الأعداد القياسية، كتقاطع مجموعات مفتوحة في R: $W_1, W_2, \ldots$ لنضع $F_n =$ متممة W_n في R، $\forall n \in N$. حينئذ F_n مجموعة مغلقة في R، $\forall n \in N$، وعلاوة على ذلك، فإن:

$$\bigcup_1^\infty F_n = \bigcup_1^\infty (R - W_n) = R - \bigcap_1^\infty W_n = \text{متممة } Q^c .$$

بما أن Q قابلة للعد، فلها تعبير على النحو التالي: $Q = \{a_1, a_2, \ldots\}$ لنعرف المجموعات $G_1, G_2, \ldots$، الآن، كما يلي: $G_{2n-1} = F_n$، و$G_{2n} = \{a_n\}$، $\forall n \in N$. بما أن $G_1, G_2, \ldots$ مجموعات مغلقة، و$\bigcup_1^\infty G_n = R$، وR فضاء تام، فثمة $m \in N$ بحيث أن $G_m^o \neq \phi$ (نظرية بير). بيد أن هذا ليس ممكناً، إذ أن G_m مجموعة جزئية من Q، أو مجموعة جزئية من متممة Q. إزاء هذا التناقض، نستنتج أن ليس ثمة دالة مستمرة عند كل النقاط القياسية، وغير مستمرة عند أي من النقاط اللاقياسية. □

ومن تطبيقات نظرية بير في التحليل الحقيقي، النظرية التي تنص على أنه إذا كانت $f:I \to R$ دالة مستمرة، و$\varepsilon > 0$، فهنالك دالة مستمرة $g:I \to R$ بحيث أن حعا $|f-g| < \varepsilon$، وg غير قابلة للمفاضلة عند أي نقطة في I ([12] ص 297).

٣- التراص في الفضاءات المترية

في هذا الشأن، نلقي الضوء على العلاقة بين خاصتي التام والتراص، في إطار الفضاءات المترية.

ونبدأ بتقديم مفهومين جديدين: المحدودية الكلية، والتراص بالتوالي:

تعريف. إذا كان X فضاء مترياً، فيقال إنه **محدود كلياً**(١) إذا كان يحقق الشرط التالي:

كلما كانت $\varepsilon > 0$، فثمة عدد منته من الأقراص المفتوحة في X، بحيث أن نصف قطر كل منها يساوي ε، وتشكل غطاء للفضاء X.

من الجلي، أن مفهومي المحدودية، والمحدودية الكلية يتطابقان بالنسبة للفضاءات الجزئية من R^n. أما من ناحية عامة، فالمحدودية الكلية تستلزم المحدودية، ولكن العكس غير صحيح: ففي حين أن الفضاء المتري التافه R محدود، فإنه غير **محدود كلياً**.

تعريف. إذا كان X فضاء مترياً بحيث أن لكل متوالية في X متوالية جزئية تقاربية، فيقال إن X **متراص بالتوالي**(٢).

الآن نبرهن النظرية الرئيسية في هذا الجزء:

---

(١) Totally bounded

(٢) Sequentially compact

٦,١٠ نظرية. إذا كان X فضاء مترياً، فحينئذ تتكافأ الشروط التالية:

(i) X فضاء متراص.

(ii) X يتمتع بخاصة ب-و.

(iii) X فضاء متراص بالتوالي.

(iv) X فضاء تام ومحدود كلياً.

البرهان. لقد أثبتنا من قبل (نظرية ٦,٢) أن (i)⇐(ii)، والآن نبين أن (ii)⇐(iii)، و(iii)⇐(iv)، و(iv)⇐(i).

الخطوة الأولى. (ii)⇐(iii): لنفرض أن (x_n) متوالية في X. لتكن $A = \{x_n : n \in N\}$. إذا كانت A مجموعة منتهية، فثمة $a \in A$، وعدد لانهائي من الأعداد الطبيعية: $n_1 < n_2 < ..$ بحيث أن $a = x_{n_1} = x_{n_2} = ...$ إذن (x_{n_i}) متوالية جزئية تقاربية من (x_n).

إذا لم تكن A منتهية، فنظراً إلى تمتع X بخاصة ب-و، فثمة نقطة نهاية $x \in X$ للمجموعة A. نختار n_1 بحيث أن $x_{n_1} \in A \cap B(x;1)$. ثم نختار n_2 بحيث أن $n_1 < n_2$، $x_{n_2} \in A \cap B(x;\frac{1}{2})$. بعد ذلك نختار $n_2 < n_3$ بحيث أن $x_{n_3} \in A \cap B(x;\frac{1}{3})$. إذ نسير على هذا المنوال، تصبح لدينا متوالية جزئية (x_{n_j}) من (x_n) بحيث أن $d(x,x_{n_j}) < \frac{1}{j}\ \forall\ j \in N$، مما يتبين منه أن (x_{n_j}) تؤول إلى x.

الخطوة الثانية. (iii)⇐(iv): لتكن (x_n) متوالية كوشي في X. إذن $\forall\ \varepsilon > 0$، ثمة m بحيث أن $d(x_n,x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$ كلما كانت n و$p \geq m$...(أ). بما أن X متراص بالتوالي، فثمة $x \in X$، ومتوالية جزئية تقاربية (x_{n_i}) من (x_n) بحيث أن (x_{n_i}) تؤول إلى x. إذن ثمة $n_k \geq m$ بحيث أن $d(x,x_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2}$ كلما كانت $i \geq k$..(ب). يترتب على (أ) و(ب) أن $d(x,x_n) < \varepsilon, \forall\ n \geq n_k$، أي أن (x_n) متوالية تقاربية. إذن X فضاء تام.

X فضاء محدود كلياً: لنفرض جدلاً أنه ليس كذلك. إذن ثمة $\varepsilon > 0$ بحيث أن أي عدد منته من الأقراص المفتوحة في X، واللاتي نصف قطر كل منها يساوي ε، لا يشكل غطاء للفضاء X. نختار $x_1 \in X$. بما أن $B(x_1, \varepsilon)$ لا تساوي X، فثمة $x_2 \in$ متممة $B(x_1; \varepsilon)$. بما أن $B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)$ لا يساوي X، فيمكننا أن نختار x_3 في متممة $B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)$. إذ نستمر بهذه الطريقة (أو بالاستقراء الرياضي)، تكون لدينا متوالية (x_n) بحيث أن $x_n \in$ متممة $\bigcup_{1}^{n-1} B(x_i; \varepsilon)$. من ثم، فإن $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$ كلما كانت $p \geq q$. من هذا يتضح أن كل متوالية جزئية من (x_n)، متوالية تباعدية، مما يتناقض مع افتراضنا أن X متراص بالتوالي. إذن X محدود كلياً.

الخطوة الثالثة. (iv)⇐(i): ليكن X فضاء تاماً ومحدوداً كلياً. لنفرض جدلاً أنه غير متراص. إذن ثمة

غطاء مفتوح G لـ X بحيث أن G لا يحوي غطاء جزئياً منتهياً. بما أن X محدود كلياً، فثمة $x_1 \in X$ بحيث أن من غير الممكن تغطية $B(x_1;1) = A_1$ بعدد منته من عناصر G. بنفس الحجة، ثمة مجموعة A_2 بحيث أن قطر $A_2 < \frac{1}{2}$، وA_2 محتواة في A_1، وليس ثمة غطاء جزئي منته من G لـ A_2. بالاستقراء الرياضي، إذن، توجد متوالية (A_n) من المجموعات الجزئية من X، بحيث أن:

(أ) قطر $A_n < \frac{2}{n}$

(ب) A_n متوالية تناقصية.

و(جـ) ليس ثمة عدد منته من عناصر G $G_1,...,G_m$ بحيث أن $A_n \subset \bigcup_1^m G_i$.

$\forall n \in N$ نختار $x_n \in A_n$. حينئذ $d(x_m,x_n) < \frac{2}{n}$, $\forall m \geq n$، ولذا فإن (x_n) متوالية كوشي في X. بما أن X فضاء تام، فإن (x_n) تؤول إلى نهاية $x \in X$. نختار جواراً $U \in G$ للنقطة x. إذن ثمة $\delta > 0$ بحيث أن U تحوي $B(x;\delta)$. نختار عدداً طبيعياً $r > \frac{3}{\delta}$ بحيث أن $d(x,x_r) < \frac{\delta}{3}$. إذن $B(x;\delta)$ تحوي A_r، ولذا فإن U تحوي A_r، مما يتناقض مع تعريف A_r. إذن X فضاء متراص.

بهذا يكتمل برهان النظرية. □

كثير من تطبيقات النظرية السابقة يتم عبر الاستنتاج التالي منها:

٦,١١ **نظرية (تمهيد الغطاء للبيق)**[١]. ليكن X فضاء مترياً متراصاً، وليكن G غطاء مفتوحاً له. حينئذ ثمة $\delta > 0$ بحيث أن كل مجموعة جزئية من X، لها قطر أقل من δ ، تكون محتواة في أحد عناصر G.

البرهان. لنفرض جدلاً أنه ليس ثمة $\delta > 0$ تحقق الشرط المطلوب. إذن لكل $n \in N$، ثمة مجموعة جزئية غير خالية A_n من X بحيث أن قطر A_n أقل من $\frac{1}{n}$، وليس ثمة عنصر من G يحوي A_n. لنختار نقطة $x_n \in A_n$, $\forall n \in N$. استناداً على النظرية السابقة، فإن X فضاء متراص بالتوالي، ولذا فثمة متوالية جزئية (x_{n_i}) من (x_n) بحيث أن (x_{n_i}) تؤول إلى نقطة $x \in X$. نختار جواراً $U \in G$ للنقطة x. إذن ثمة $r > 0$ بحيث أن القرص المفتوح $B(x;r)$ محتوى في U. الآن نختار $i \in N$ بحيث أن $n_i > \frac{3}{r}$ و$d(x,x_{n_i}) < \frac{r}{3}$. من الجلي، حينئذ، أن $A_{n_i} \subset B(x_{n_i};\frac{r}{3}) \subset B(x;r) \subset U$. لكننا افترضنا أن A_{n_i} غير محتواة في أي من عناصر G. إذن توجد $\delta > 0$ تحقق الشرط المطلوب. □

إذا كان δ عدداً موجباً يحقق نتيجة تمهيد الغطاء للبيق، فيسمى δ عدد لبيق[٢] للغطاء G.

---

(١) The Lebesgue-covering lemma

(٢) Lebesgue number

يمكننا أن نستنتج من تمهيد الغطاء للبيق أن الاستمرار والاستمرار المنتظم يتكافآن إذا كان نطاق الراسم فضاء مترياً متراصاً.

تعريف. إذا كان f راسماً من فضاء متري (X,d) إلى فضاء متري (Y,d')، فيقال إن f **مستمر بانتظام**[١] إذا كان يحقق الشرط التالي:

$\forall\ \varepsilon > 0$، توجد $\delta > 0$ بحيث أن:

$d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$، كلما كانت x_1 و$x_2 \in X$، و$d(x_1,x_2) < \delta$.

من الجلي أن الاستمرار المنتظم يستلزم الاستمرار. من جهة أخرى، فإن العكس غير صحيح، إلا في حالات خاصة، من بينها:

٦,١٢ استنتاج. ليكن لدينا راسم مستمر:

$$f:(X,d) \longrightarrow (Y,d')$$

إذا كان (X,d) فضاء متراصاً، فحينئذ يكون f مستمراً بانتظام.

البرهان. لتكن $\varepsilon > 0$. استناداً على استمرار f، فإن $\{f^{-1}B(y,\frac{\varepsilon}{2}) : y \in Y\}$ غطاء مفتوح للفضاء X. ليكن δ عدد لبيق لهذا الغطاء (X متراص). من ثم، إذا كانت x_1 و$x_2 \in X$، و$d(x_1,x_2) < \delta$، فثمة $y \in Y$ بحيث أن $f(x_1)$، و$f(x_2) \in B(y;\frac{\varepsilon}{2})$. إذن $d(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$ مما يثبت أن f مستمر بانتظام. □

إذ تطرقنا لدراسة الفضاءات المترية المتراصة، فلا بد من الإشارة لنظرية ذات مكانة مرموقة، في هذا الصدد، وتنص على أن كل فضاء متري متراص يكون صورة مستمرة لفضاء كانتر C ([7]).

---

(١) Uniformly continuous

تمارين (٦)

الجزء الأول.

١ ــ بين أن كلاً من الفضاءين التاليين فضاء تام:

(أ) $M_n(R)$

(ب) $(C(I),d_1)$.

٢ ــ بين أن $(C(I),d_2)$ فضاء غير تام.

٣ ــ ليكن (X_1,d_1) و(X_2,d_2) فضاءين تامين، وd المترك على $X_1 \times X_2$ المعرف على النحو التالي:

إذا كانت $x = (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$، و$x^1 = (x^1_1,x^1_2) \in X_1 \times X_2$ حينئذ

$$d(x,x^1) = \sqrt{((d_1(x_1,x^1_1))^2 + (d_2(x_2,x^1_2))^2)}$$

اثبت أن $(X_1 \times X_2,d)$ فضاء تام.

٤ــ أورد مثالاً لفضاء متري تام ومحدود، وليس متراصاً.

الجزء الثاني

٥ــ أورد مثالاً لفضاء متري ليس فضاء بير.

٦ــ بين أنه إذا كان $f:X \rightarrow Y$ راسماً مفتوحاً ومستمراً وغامراً، وكان X فضاء بير، فحينئذ Y فضاء بير.

٧ــ قرر ما إذا كانت الدعوى التالية صحيحة أم لا:

إذا كان X فضاء تبولوجيا متراصاً، حينئذ فإن X فضاء بير.

٨ــ لتكن f الدالة المعرفة على R على النحو التالي:

إذا كان x عدداً قياسياً: $x = p/q$ حيث p وq عددان صحيحان، $q > 0$، و$(p,q) = 1$، حينئذ $f(x) = \frac{1}{q}$، أما إذا كان x لاقياسياً، فنعرف: $f(x) = 0$. اثبت أن $f:R \rightarrow R$ مستمرة على مجموعة النقاط اللاقياسية، وغير مستمرة عند أي من النقاط القياسية.

٩ــ بين أنه إذا كان X فضاء مترياً تاماً، وليس ثمة نقاط معزولة فيه، فإن X مجموعة غير قابلة للعد.

الجزء الثالث.

١٠– ليكن $\{a,b\}$ الفضاء اللامتقطع المكون من نقطتين، وN الفضاء المعتاد. بين أن $\{a,b\}\times N$ يتمتع بخاصة ب–و، بيد أنه ليس متراصاً.

١١– اثبت أنه إذا كان لدينا فضاء متري متراص X، فثمة مجموعة جزئية قابلة للعد من X بحـ لصاقتها تساوي X.

١٢– بين أن تركيب راسمين مستمرين بانتظام هو راسم مستمر بانتظام.

الفصل السابع

مسلمات الفصل والعد

Separation and Countability Axioms

مقدمة

يتمتع الفضاء المتري بكيان تبولوجي غني: يتجلى ذلك من دراستنا للتراص في الفضاءات المترية، وتدلّل عليه الحقيقة التالية:

إذا كان لدينا فضاء متري، يحوي أكثر من نقطة، فثمة دالة مستمرة غير ثابتة عليه (تمارين (١): م١٥). وعلى النقيض من ذلك الفضاء اللامتقطع: فهو فضاء تافه، لا يكون نطاقاً لأي دالة مستمرة غير ثابتة. وثمة أصناف من الفضاءات التبولوجية، نقدمها في الفصل الحالي، تقع بين هذين الطرفين، وتتدرج في الأهمية، وتعرف بالفضاءات T_1، والفضاءات T_2 (وقد مرت علينا)، والفضاءات المنتظمة، والسوية. وسوف نقوم بدراسة أهم خواصها، والعلاقات بينها.

وأهم هذه الأنواع، الفضاء السوي. وعلى الرغم من أن السواء وحده لا يستلزم قابلية التعبير المتري، إلاّ أنه إذا كان الفضاء سوياً، ويحقق مسلمة العد الثانية، فحينئذ يقبل التعبير المتري. هذا ما حدا بنا لتقديم مسلمات العد، في هذا الفصل: ففي الفصل التالي: نتناول نظرية التعبير المتري.

١– مسلمات الفصل T_1 وT_2 وT_3

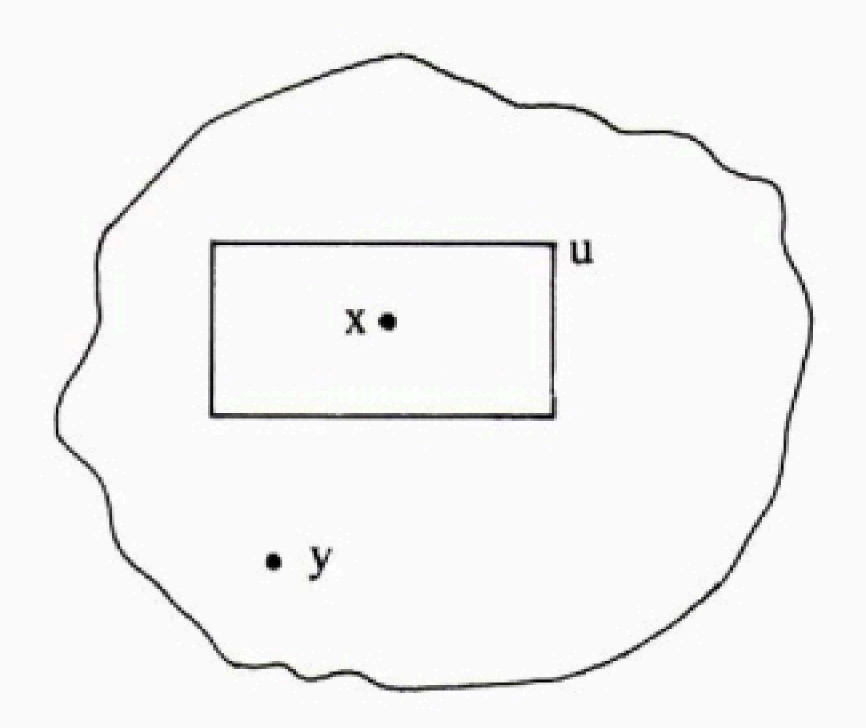
تعريف. إذا كان X فضاء تبولوجيا، فيقال إنه **فضاء T_1**[١] أو يستوفي **مسلمة الفصل T_1**[٢] إذا كان يحقق الشرط التالي:

إذا كانت x وy ∈ X، و$y \neq x$، حينئذ ثمة جوار مفتوح U للنقطة x بحيث أن U لا تحوي y.

---

(١) T_1 – space

(٢) The T_1 – separation axiom



الشكل(٧,٠١) مسلمة الفصل T_1

٧,٠١ مثال. إذا كان X فضاء مترياً ، فحينئذ X فضاء T_1.

٧,٠٢ مثال. فضاء المتممة المنتهية فضاء T_1.

٧,٠٣ مثال. الفضاء اللامتقطع ليس فضاء T_1 إلا إذا كان وحيد العنصر.

كنا قد عرفنا مسلمة الفصل T_2 في الفصل الثاني . فيما يلي ، ملخص لأهم خواص الفضاءات T_1 وT_2:

أ) إذا كان X فضاء تبولوجيا ، فإنه فضاء T_1 إذا وإذا فقط كانت كل مجموعة جزئية منتهية من X مغلقة فيه.

ب) إذا كان A فضاء جزئياً من فضاء $T_1(T_2)$، حينئذ يكون A فضاء $T_1(T_2)$.

جـ) مسلمة الفصل $T_1(T_2)$ خاصة تبولوجية.

د) ليكن $X = \pi_j X_j$ فضاء جداء. لكي يكون X فضاء $T_1(T_2)$، فيلزم ويكفي أن يكون X_j فضاء $T_1(T_2)$, $\forall j \ni J$.

هـ) من الواضح ، أن استيفاء مسلمة الفصل T_2 يستلزم مسلمة الفصل T_1. بيد أنه توجد فضاءات T_1 ليست T_2. لنأخذ مثلاً الفضاء [١و١-] ، ولنعتبر فضاء المطابقة X الناشىء عن اعتبار x مطابقة لـ x- ، كلما كانت x∋(١و١-). حينئذ X فضاء T_1 وليس فضاء T_2 إذ أن كل جوار للنقطة ١ يقاطع كل جوار للنقطة ١- .

و) ثمة فضاءات T_2 ، لا توجد أي دوال مستمرة غير ثابتة عليها. فقد ألمحنا ، في الفصل الرابع ، إلى أن قولمب[1] قد أنشأ تبولوجيا U على N بحيث أن (U و N) فضاء متصل وT_2([9]). بما أن N قابلة للعد ، فيترتب على استنتاج ٤,٠٨، أن ليس ثمة دالة مستمرة غير ثابتة على (N, U).

(١) Golomb

نمضي الآن لدراسة الفضاءات المنتظمة. ونود أن نلفت النظر إلى أنه ليس هنالك اتفاق عام على تعريف الفضاء المنتظم أو السوي.

تعريف. ليكن X فضاء T_1. يقال إن X **منتظم**(١) **أو يستوفي مسلمة الفصل T_3** إذا كان يحقق الشرط التالي:

كلما كانت A مجموعة جزئية مغلقة، غير خالية، من X، و $x \in A^c$ فثمة جوار مفتوح U للنقطة x، وجوار مفتوح V لـ A بحيث أن U وV لا يتقاطعان.

٧,٠٤ **مثال**. كل فضاء متقطع هو فضاء منتظم.

٧,٠٥ **مثال**. إذا كان X متراصاً وهاوسدورف، فحينئذ X فضاء منتظم (نظريتي ٥,٠٨ و ٥,٠٩).

من الجلي أن الانتظام يستلزم مسلمة الفصل T_2، والمثال التالي، يبين أن العكس غير صحيح.

٧,٠٦ **مثال**. لنعتبر المجموعة R. لتكن S المجموعة المشكلة من كل الفترات المفتوحة، زائداً مجموعة الأعداد القياسية Q. لتكن U التبولوجيا على R المولدة من القاعدة:

$$\{S_1 \cap \ldots \cap S_n : S_i \in S,\ 1 \leq i \leq n,\ n \in N\}.$$

من الجلي، أن U أكبر من التبولوجيا المعتادة، ومن ثم، فإن (R وU) فضاء هاوسدورف.

إذا اعتبرنا الآن مجموعة الأعداد اللاقياسية Q^c، نجد أنها مغلقة في هذا الفضاء، ولا تحوي العدد ١. علاوة على ذلك، فكل جوار مفتوح لـ Q^c يقاطع كل جوار مفتوح لـ ١، مما يؤدي إلى أن (R وU) ليس منتظماً.

فيما يلي، نبين أن الانتظام يبقى عندما ننتقل من فضاء منتظم إلى فضاءاته الجزئية، أو إذا أنشأنا فضاء جداء من مجموعة فضاءات منتظمة. وفي سبيل ذلك، نورد أولاً خاصة مميزة للانتظام.

تعريف. يقال إن G جوار مغلق(٢) لـ A في الفضاء X إذا كانت G مغلقة في X وG^o جوار مفتوح لـ A في X.

٧,٠٧ **نظرية**. ليكن X فضاء T_1. لكي يكون X فضاء منتظماً فيلزم ويكفي أن يحقق الشرط التالي:

إذا كانت $x \in X$، حينئذ كل جوار مفتوح للنقطة x يحوي جواراً مغلقاً لها.

---

(١) Regular

(٢) Closed neighbourhood

البرهان. لنفرض أن X فضاء منتظم. لنفرض أن $x \in X$ وأن U جوار مفتوح لها. إذن $A = U^c$ مغلقة في X، ولا تحوي x. من ثم، فيوجد جوار مفتوح V لـ x، وجوار مفتوح W لـ A بحيث أن V لا تقاطع W. الآن W^c مجموعة مغلقة تحوي V، ومن ثم، فإنها تحوي $\overline{V}$. بما أن U تحوي W^c، فإن U تحوي $\overline{V}$. إذن $\overline{V}$ جوار مغلق لـ x محتوى في U.

نأتي الآن لإثبات العكس. نفرض أن A مغلقة في X، وأن $x \in A^c$. بما أن A^c جوار مفتوح لـ x، فثمة جوار مغلق V لـ x تحويه A^c. حينئذ $W = V^c$ مجموعة مفتوحة في X، وتحوي A، ولا تقاطع الجوار المفتوح V^o للنقطة x. إذن X فضاء منتظم. □

٧,٠٨ نظرية

(i) إذا كان X فضاء منتظماً، وS فضاء جزئياً من X، فحينئذ S فضاء منتظم.

(ii) إذا كان X_j فضاء منتظماً، لكل j في عائلة J، فحينئذ فضاء الجداء $\pi_j X_j$ يكون منتظماً.

البرهان.

(i) لنفرض أن A مغلقة في S، وأن $x \in S-A$. إذن ثمة مجموعة مغلقة A_1 في X بحيث أن $A = S \cap A_1$. بما أن X فضاء منتظم، وx لا تنتمي إلى A_1، فثمة جوار مفتوح U_1 لـ A_1، وجوار مفتوح V_1 لـ x، في الفضاء X، بحيث أن $U_1 \quad V_1 = \phi$. من ثم، فإن $S \cap U_1 = U$ جوار مفتوح لـ A في الفضاء S، و$S \cap V_1 = V$ جوار مفتوح لـ x في الفضاء S، وU لا يقاطع V. من ثم، فإن S فضاء منتظم.

(ii) لنفرض أن $x \in X$، وأن U جوار مفتوح لـ x في فضاء الجداء X. بما أن الإسقاط الطبيعي $p_j : X \to X_j$ راسم مفتوح، إذن $p_j U$ جوار مفتوح لـ $x(j) \in X_j, \forall j \in J$. نظراً لانتظام X_j، فثمة جوار مغلق V_j لـ $x(j)$ في X_j بحيث أن V_j محتوى في $p_j U$. من ثم، فإن $V = \pi_j V_j$ جوار مغلق للنقطة x، محتوى في U. استناداً على النظرية السابقة، فإن X فضاء منتظم. □

٢ – مسلمات العد

تعريف. الفضاء التبولوجي X قابل للفصل[1] إذا كانت ثمة مجموعة جزئية من X، قابلة للعد، وكثيفة في X.

٧,٠٩ مثال. إذا كان X فضاء تبولوجيا، وكانت X مجموعة قابلة للعد، حينئذ يكون X قابلاً للفصل.

٧,١٠ مثال. الفضاء R^n قابل للفصل. كي نبين ذلك، نثبت أن لصاقة Q^n تساوي R^n. لنفرض أن $x \in R^n$، وليكن $B(x;\varepsilon)$ قرصاً مفتوحاً مركزه x. بما أن Q كثيفة في R، فثمة عدد قياسي q_i بحيث أن

---

(١) Separable

$x_i < q_i < x_i + \varepsilon/\sqrt{n}$,$1 \le i \le n$، حيث $x_1, ..., x_n$ احداثيات x. إذن $q = (q_1, ..., q_n) \in Q^n$، و$d(x,q) < \varepsilon$؛ أي أن $q \in B(x;\varepsilon)$. يترتب على ذلك أن $x \in \overline{Q^n}$، ومن ثم، فإن Q^n كثيفة في R^n.

٧,١١ **مثال**. إذا كان X فضاء متقطعاً، فإنه قابل للفصل إذا وإذا فقط كانت X مجموعة قابلة للعد. ذلك لأنه إذا كانت A مجموعة جزئية قابلة للعد من X، عندئذ فإن $X \ne A = \overline{A}$ إذا كانت X غير قابلة للعد.

٧,١٢ **مثال**. $(C(I),d_1)$ فضاء قابل للفصل. استناداً على نظرية وايرستراس[١] المعروفة في التحليل الحقيقي، فإن مجموعة كثيرات الحدود $R[x]$ كثيفة في $(C(I),d_1)$. من ثم، فمن السهل أن يبين أن $Q[x]$ كثيفة في $(C(I),d_1)$. بما أن $Q[x]$ قابلة للعد، إذن $(C(I),d_1)$ قابل للفصل.

٧,١٣ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا قابلاً للفصل، و$f: X \to Y$ راسماً مستمراً وغامراً، حينئذ فإن الفضاء Y قابل للفصل.

البرهان. لتكن A مجموعة قابلة للعد وكثيفة في X. من ثم، فإن $f(A)=B$ قابلة للعد. الآن نبين أن $Y=\overline{B}$. نفرض أن $y \in Y$، وأن N_y جوار مفتوح لـ y في Y. يترتب على استمرار f، أن $f^{-1}N_y$ مفتوحة في X. بما أن f راسم غامر، حينئذ $f^{-1}N_y$ غير خالية. إذن ثمة $a \in A \cap f^{-1}N_y$، مما يستلزم أن $f(a) \in B \cap N_y$. من ثم، فإن $Y=\overline{B}$. □

٧,١٤ **استنتاج**. قابلية الفصل خاصة تبولوجية.

الآن نقدم مسلمتي العد الأولى والثانية.

تعريف. يستوفى الفضاء التبولوجي X مسلمة العد الأولى[٢] أو هو فضاء C_1[٣] بشرط أنه إذا كانت $x \in X$، فثمة مجموعة قابلة للعد من الجوارات المفتوحة لـ x $\{N_1, N_2, ...\}$ بحيث أن كل جوار للنقطة x يحوي واحداً من $N_1, N_2, ...$.

يستوفى الفضاء التبولوجي X **مسلمة العد الثانية**[٤]، أو هو فضاء C_2[٥] إذا كانت له قاعدة مفتوحة قابلة للعد.

---

(١) Weierstrass

(٢) The first countability axiom

(٣) C_1 - space

(٤) The second countability axiom

(٥) C_2 - space

من الجلي، أنه إذا كان لدينا فضاء C_2، فإنه يكون فضاء C_1. من ناحية أخرى، إذا كانت X قابلة للعد، وX فضاء C_1، فحينئذ X فضاء C_2.

٧,١٥ **نظرية**. إذا كان X فضاء C_2، حينئذ يكون X قابلاً للفصل.

البرهان. لتكن $\{B_1, B_2, ...\}$ قاعدة مفتوحة لـ X. نختار $b_n \in B_n, \forall n \in N$، ونضع $A = \{b_1, b_2, ...\}$. واضح أن A قابلة للعد، وتقاطع كل مجموعة مفتوحة في X. من ثم، فإن X قابل للفصل. □

٧,١٦ **نظرية**. إذا كان X فضاء تبولوجيا، قابلاً للتعبير المتري، وللفصل، حينئذ يكون X فضاءً C_2.

البرهان. لنفرض أن تبولوجيا الفضاء X ناشئة عن المترك d. بما أن X قابل للفصل، فثمة مجموعة $A = \{a_1, a_2, ...\}$ كثيفة في X. الآن نبين أن المجموعة القابلة للعد:

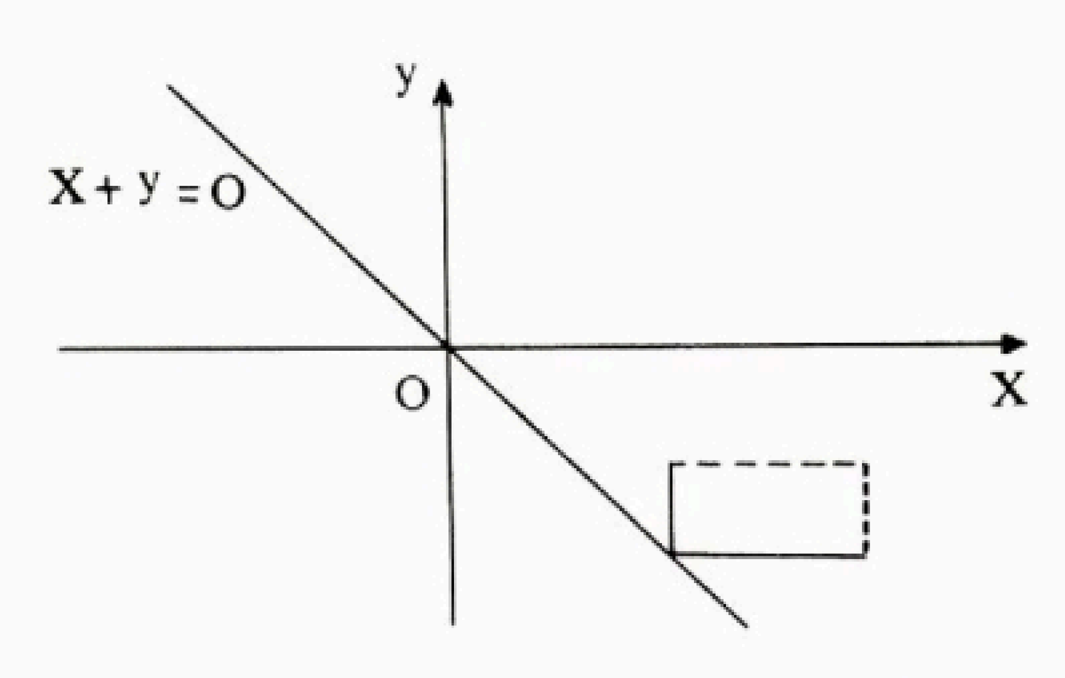
$$\mathcal{B} = \{B(a_n; q) : n \in N, q \in Q\}$$

قاعدة مفتوحة لـ X. إذا أخذنا $x \in X$، وجواراً مفتوحاً U لـ x، فثمة قرص مفتوح $B(x;\varepsilon)$ تحويه U. بما أن A كثيفة في X فثمة $a_n \in A$ بحيث أن $d(x, a_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. لنضع $d(x, a_n) = r$. بما أن Q كثيفة في R، فثمة $q \in Q$ بحيث أن $r < q < \frac{\varepsilon}{3}$. يترتب على ذلك، أن $B(a_n; q)$ جوار لـ x محتوى في $B(x;\varepsilon)$. إذن $\mathcal{B}$ قاعدة مفتوحة لـ X، ومن ثم، فإن X فضاء C_2. □

ملاحظات.

(i) النظرية السابقة تزودنا بعدد من الأمثلة لفضاءات تستوفي مسلمة العد الثانية، فمثلاً R^n، و$(C(I), d_1)$، والفضاءات المتقطعة القابلة للعد، كلها فضاءات C_2، وفق نظرية ٧,١٦، والأمثلة ٧,١٠-٧,١٢.

(ii) ثمة فضاءات قابلة للفصل، لها فضاءات جزئية غير قابلة للفصل. لنعتبر، على سبيل المثال، التبولوجيا $\mathcal{U}$ على R^2، المولدة من القاعدة المشكلة من المستطيلات النصف مغلقة - مفتوحة. إننا نجد أن Q^2 كثيفة في هذا الفضاء، ومن ثم فهو قابل للفصل. بيد أن الفضاء الجزئي $x+y=0$ فضاء متقطع، غير قابل للعد، ولذا فهو غير قابل للفصل (مثال ٧,١١).



الشكل(٧,٢) قابلية الفصل لا تُورَّث للفضاءات الجزئية دوماً.

(iii) إذا كان X فضاء C_2، وA فضاء جزئياً من X، حينئذ يكون A فضاءً C_2. لأنه إذا كانت $\{B_n: n \in N\}$ قاعدة مفتوحة لـ X، فإن $\{A \cap B_n: n \in N\}$ قاعدة مفتوحة قابلة للعد لـ A.

(iv) في ضوء (ii) و(iii)، يتضح أن قابلية الفصل لا تستلزم مسلمة العد الثانية، فالفضاء (R^2,U) الذي عرفناه في (ii) قابل للفصل، وليس فضاء C_2.

٧,١٧ **نظرية**. إذا كانت J مجموعة قابلة للعد، وX_j فضاء C_2 $\forall j \in J$، حينئذ فإن فضاء الجداء $\prod_J X_j$ فضاء C_2.

البرهان. لنفرض، دون مساس بالعمومية، أن N=J. لتكن B_n قاعدة مفتوحة قابلة للعد لـ X_n، $\forall n \in N$. لتكن B مجموعة المجموعات الجزئية من $X=\prod_N X_n$ المعرفة على النحو التالي:

$$B = \{P_{k_1}^{-1}\ B_{k_1} \cap \ldots \cap P_{k_n}^{-1}\ B_{k_n} : B_{k_i} \in B_{k_i}, k_i \in N, 1 \leq i \leq n, n \in N\}$$

من الجلي، أن B قاعدة مفتوحة، قابلة للعد، للفضاء X. من ثم، فإن X فضاء C_2. □

ثمة نوع آخر من الفضاءات ذو صلة بالفضاءات التي تستوفي مسلمة العد الثانية:

تعريف. يقال إن الفضاء التبولوجي X **فضاء لينديلوف**[1]، إذا كان كل غطاء مفتوح لـ X يحوي غطاء جزئياً قابلاً للعد.

من الجلي، أن كل فضاء متراص يكون فضاء لينديلوف.

٧,١٨ **نظرية**. إذا كان لدينا فضاءً X,C_2، فحينئذ يكون X فضاء لينديلوف.

البرهان. ليكن G غطاء مفتوحاً لـ X. لتكن $B = \{B_n: n \in N\}$ قاعدة مفتوحة لـ X. $\forall x \in X$، ثمة $G \in G$، و$B_n \in B$ بحيث أن $x \in B_n \subset G$. لتكن B' المجموعة الجزئية من B المعرفة على النحو التالي: $B_n \in B'$ إذا كان ثمة عنصر في الغطاء G يحوي B_n. من ثم، فإن عناصر B' تشكل غطاءً لـ X. لتكن $K \subset N$ عائلة مرقمة لـ B'. $\forall k \in K$، نختار $G_k \in G$ بحيث أن G_k تحوي $B_k \in B'$. من ثم، فإن $\{G_k: k \in K\}$ غطاء جزئي قابل للعد من G لـ X. إذن X فضاء لينديلوف. □

نترك للطالب مهمة برهان النظرية التالية:

---

(١) Lindelof space

٧,١٩ **نظرية**. تتكافأ الشروط التالية بالنسبة للفضاء المتري:

(أ) أن يكون C_2
(ب) أن يكون قابلاً للفصل
(جـ) أن يكون فضاء لينديلوف.

٣- الفضاءات السوية

في هذا الشأن، نتوصل إلى النتائج التالية:

١ـ قابلية التعبير المتري تستلزم السواء.
٢ـ كا فضاء لينديلوف ومنتظم يكون سوياً.
٣ـ لكي يكون الفضاء R^J سوياً، فالشرط اللازم والكافي أن تكون J قابلة للعد.

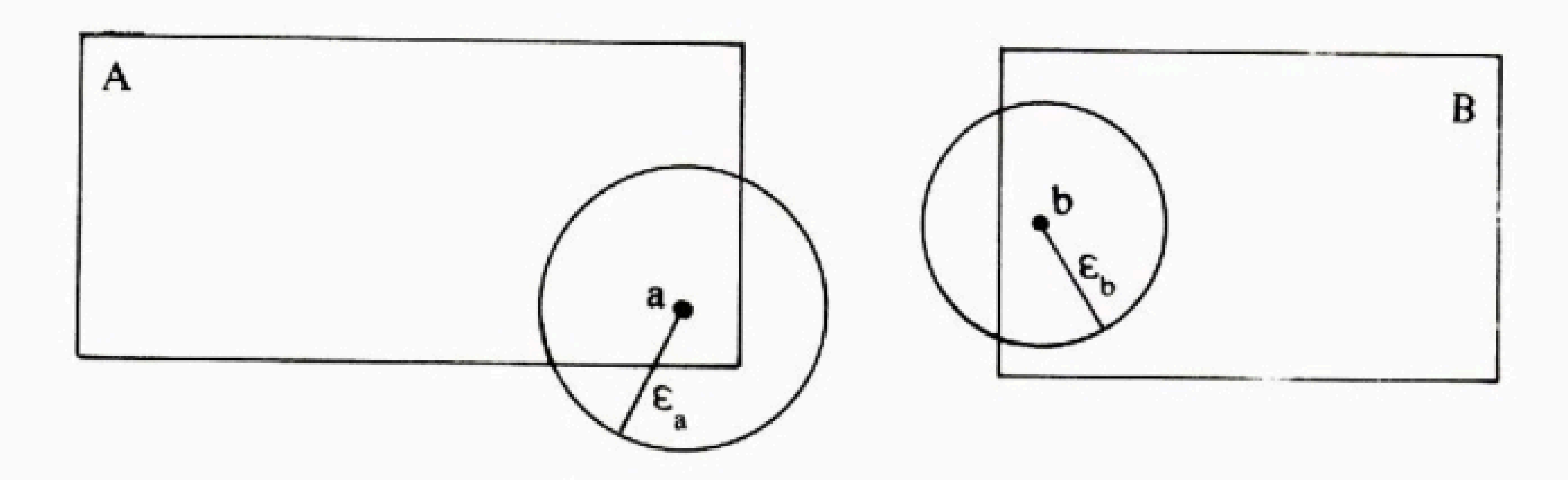
تعريف. إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X,T_1، فيقال إن X سوى[١] (T_4) إذا كان يحقق الشرط التالي:

إذا كانت A وB مجموعتين مغلقتين في X، ولا تتقاطعان، فثمة جوار مفتوح U لـ A وجوار مفتوح V لـ B، بحيث أن U لا تقاطع V.

٧,٢٠ **مثال**. إذا كان X فضاء متراصاً وهاوسدورف، حينئذ يكون X سوياً (نظريتي ٥,٨ و٥,١٠).

٧,٢١ **مثال**. كل فضاء جزئي مغلق من فضاء سوى يكون سوياً.

٧,٢٢ **نظرية**. قابلية التعبير المتري تستلزم السواء.



الشكل (٧,٠٣) سواء الفضاء المتري.

---

(١) Normal

البرهان. لتكن A وB مغلقتين في الفضاء المتري (X,d) ولا تتقاطعان. بما أن B مجموعة مغلقة، حينئذ $\forall a \ni A$، ثمة $\varepsilon_a > 0$ بحيث أن القرص المفتوح $B(a;\varepsilon_a)$ لا يقاطع B. بنفس الحجة، $\forall b \ni B$ ثمة قرص مفتوح $B(b;\varepsilon_b)$ لا يقاطع A.

لنضع $U = \bigcup_A B(a;\frac{\varepsilon_a}{3})$، و $V = \bigcup_B B(b;\frac{\varepsilon_b}{3})$

من الواضح أن U وV جواران مفتوحان لـ A وB على التوالي. لنفرض جدلاً أن $x \ni U \cap V$. إذن ثمة $a \ni A$، و$b \ni B$ بحيث أن $x \ni B(a;\frac{\varepsilon_a}{3}) \cap B(b;\frac{\varepsilon_b}{3})$، مما يترتب عليه أن

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b)$$
$$\leq \frac{2}{3} \max.\{\varepsilon_a,\varepsilon_b\}$$

وهذا يتناقض مع تعريف ε_aوε_b. إذن U لا يقاطع V. من ثم، فإن X فضاء سوي. □

نسوق الآن خاصة مميزة للسواء:

٧,٢٣ **نظرية**. ليكن X فضاء T_1. حينئذ يكون X سوياً إذا وإذا فقط كلما كانت A مغلقة في X، وكان U جواراً مفتوحاً لـ A، فثمة جوار مغلق V لـ A بحيث أن U تحوي V.

البرهان. لنفرض أن X سوي. لتكن A مجموعة مغلقة في X، وU جوار مفتوحاً لـ A. إذن U^c مجموعة مغلقة لا تقاطع A. بما أن X سوي، فثمة جوار مفتوح U_1 لـ A، وجوار مفتوح W لـ U^c، بحيث أن U_1 لا يقاطع W. إذن U_1 محتواة في W^c، ولذا فإن $\overline{U_1}$ محتواة في W^c. إذن $\overline{U_1}$ جوار مغلق لـ A تحويه U.

نأتي الآن لإثبات العكس. لنفرض أن A وB مغلقتان في X ولا تتقاطعان. من ثم، فإن B^c جوار مفتوح لـ A، وإذن فثمة جوار مغلق V لـ A تحويه B^c. إذا وضعنا $W = V^c$، يكون لدينا جوار مفتوح لـ A هو V^o وجوار مفتوح لـ B وهو W، وV^o لا يقاطع W. إذن X فضاء سوي. □

نمضي الآن لإلقاء الضوء على العلاقة بين السواء والانتظام. إنه لمن الجلي أن السواء يستلزم الانتظام، فماذا عن العكس؟ في هذا الشأن لدينا:

٧,٢٤ **نظرية**. إذا كان X فضاء لينديلوف وكان منتظماً، فحينئذ يكون فضاء سوياً.

البرهان. لتكن A وB مجموعتين مغلقتين، غير خاليتين، في X، بحيث أن A لا تقاطع B. نظراً لانتظام X، فيترتب على نظرية ٧,٠٧ أنه $\forall a \ni A$، ثمة جوار مغلق محتوى في المجموعة المفتوحة B^c. من ثم، فإن $\mathcal{G} = \{G : G$ جوار مغلق لنقطة في A، وG لا يقاطع B$\}$ غطاء لـ A. أيضاً:

$\mathcal{H} = \{H : H$ جوار مغلق لنقطة في B بحيث أن H لا يقاطع A$\}$ غطاء لـ B. يترتب على ذلك أن:

$$\{(A \cup B)^c\} \cup \{H \ni \mathcal{H} : H^o\} \cup \{G \ni \mathcal{G} : G^o\}$$

غطاء مفتوح لـ X. بما أن X فضاء لينديلوف، فثمة $G_1, G_2, ... \in G$ و$H_1, H_2, ... \in H$ بحيث أن:
$$X = (\bigcup_1^{\infty} G_n^{o}) \cup (\bigcup_1^{\infty} H_n^{o}) \cup (A \cup B)^c .$$

نعرف المجموعات U_n وV_n على النحو التالي:
$$U_n = G_n^{o} - (\bigcup_1^{n} H_k)$$
$$V_n = H_n^{o} - (\bigcup_1^{n} G_i) .$$

الآن نلاحظ ما يلي:

(أ) U_n وV_n مفتوحتان في X، $\forall n \in N$.

(ب) إذا كانت $m \leq n$، حينئذ U_n لا تقاطع H_m ولذا فإن U_n لا يقاطع V_m.

(جـ) إذا كانت $m \geq n$، حينئذ V_m لا تقاطع G_n، ولذا فإن U_n لا تقاطع V_m.

بما أن H_k لا تقاطع A، $\forall k \in N$، فإن A محتواة في $U = \bigcup_1^{\infty} U_n$. بحجة مشابهة، فإن B محتواة في $V = \bigcup_1^{\infty} V_n$. في ضوء الملاحظات (أ)، (ب) و(جـ)، نرى أن U جوار مفتوح لـ A، وV جوار مفتوح لـ B، وU لا يقاطع V. إذن X فضاء سوي. □

في ضوء النظرية التالية، يتضح أن الانتظام وحده لا يستلزم السواء.

٧,٢٥ **نظرية**. لكي يكون الفضاء R^J سوياً، فالشرط اللازم والكافي أن تكون J قابلة للعد.

البرهان.

(i) **الكفاية**: بما أن R فضاء C_2، وJ قابلة للعد، فيترتب على نظرية ٧,١٧، أن R^J فضاء C_2، ومن ثم فهو فضاء لينديلوف (نظرية ٧,١٨). علاوة على ذلك، فإن R^J منتظم إذ هو جداء فضاءات منتظمة (نظرية ٧,٨). إذن R^J فضاء سوي (نظرية ٧,٢٤).

(ii) **اللزوم**: نثبت أنه عندما تكون J غير قابلة للعد، فإن R^J غير سوي. في ضوء مثال ٧,٢١، فيكفي أن نبين أن:

(أ) N^J مغلق في R^J.

(ب) الفضاء الجزئي N^J غير سوي.

إذا كانت $x \in (N^J)^c$، فثمة $i \in J$ بحيث أن $x(j) \in R - N$ ولذا فإن $p_j^{-1}(R - N)$ جوار مفتوح لـ x، تحويه $(N^J)^c$. إذن $(N^J)^c$ مجموعة مفتوحة، ومن ثم، فإن N^J مجموعة مغلقة في R^J.

لننتقل الآن إلى (ب). سوف نورد مجموعتين مغلقتين في الفضاء N^J، غير خاليتين، ولا تتقاطعان، وفي ذات الوقت، فإن كل جوار مفتوح للأولى يقاطع كل جوار مفتوح للثانية. لتكن A وB المجموعتين التاليتين:

$A = \{x \in N^J : \{n\}$ x^{-1} تحوي على الأكثر عنصراً واحداً من $J, \forall n \in \{1\} - N\}$
$B = \{x \in N^J : \{n\}$ x^{-1} تحوي على الأكثر عنصراً واحداً من $J, \forall n \in \{2\} - N\}$.

نبين أولاً أن A وB مغلقتان في N^J. لنفرض أن $x \in A^c = N - A$. إذن ثمة $n \in N$، $n \neq 1$ وj_1 و$j_2 \in J$، بحيث أن $j_2 \neq j_1$ و$x(j_1) = x(j_2) = n$. من ثم، فإن $p^{-1}_{j_1}(\{n\}) \cap p^{-1}_{j_2}(\{n\})$ جوار مفتوح لـ x، محتوى في A^c اذن A^c مجموعة مفتوحة، وA مجموعة مغلقة في N^J. بحجة مشابهة، يمكن أن نبين أن B مغلقة أيضاً في N^J.

لنفرض الآن أن U جوار مفتوح لـ A. إذن U جوار مفتوح لـ x_1 A حيث x_1 معرفة على النحو التالي: $x_1(j) = 1, \forall i \in J$. في ضوء تعريف فضاء الجداء، فثمة $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n_1} \in J$ بحيث أن $U_1 = p^{-1}_{\alpha_1}(\{1\}) \cap ... \cap p^{-1}_{\alpha_{n_1}}(\{1\})$ جوار مفتوح لـ x_1، وتحويه U. واضح أن $x \in U_1$ إذا وإذا فقط كانت $x(j) = 1, \forall j \in \{\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}\}$.

لتكن $x_2 \in A$ معرفة على النحو التالي:

$x_2(\alpha_n) = n$، إذا كانت $1 \leq n \leq n_1$، و$x_2(j) = 1$ فيما عدا ذلك. بنفس الحجة السابقة، ثمة $n_1 < n_2$، وعناصر $\alpha_n \in J$، $n_1 < n \leq n_2$، بحيث أن المجموعة $U_2 = \{x \in N^J : x(\alpha_n) = n$ إذا كانت $1 \leq n \leq n_1$، و$x(\alpha_n) = 1$ إذا كانت $n_1 < n \leq n_2\}$ جوار لـ x_2 تحويه U.

إذ نسير على هذا المنوال، نحصل على متوالية في J : $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ومتوالية من الأعداد: $0 = n_0 < n_1 < n_2$ ... بحيث أن المجموعة:

$$U_i = \{x \in N^J : x(\alpha_n) = n \text{ إذا كانت } 1 \leq n \leq n_{i-1}, x(\alpha_n) = 1 \text{ إذا كانت } n_{i-1} < n \leq n_i\}$$

مجموعة جزئية من $U, \forall i \in N$.

الآن نعتبر النقطة $b \in B$ حيث $b(\alpha_n) = n, \forall n \in N$، و$b(j) = 2$ فيما عدا ذلك. نضع $K = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$. لنفرض أن V جوار مفتوح لـ B. حينئذ V جوار لـ b وإذن ثمة مجموعة جزئية منتهية L من J، بحيث أن المجموعة:

$$V_L = \{x \in N^J : x(\alpha_n) = n, \forall \alpha_n \in L \cap K, x(j) = 2, \forall j \in L - K\}$$

جوار مفتوح لـ b، تحويه V.

الآن نبين أن V_L تقاطع U_i ما. لنفرض جدلاً أن هذا غير صحيح. حينئذ، $\forall i \in N$، فإن V_L لا تقاطع U_i. هذا يستلزم أنه $\forall i \in N$، ثمة $n \in N$ بحيث أن $n_{i-1} < n \leq n_i$، و$\alpha_n \in L$، مما يتبين منه أن L مجموعة

لا نهائية. نظراً لهذا التناقض، فإن V_L تقاطع $\bigcup_1^n U_i$ ، وإذن فإن U تقاطع V. □

ملاحظات.

(i) إذا كانت J غير قابلة للعد، فإن الفضاء I فضاء سوي لأنه هاوسدورف ومتراص (نظرية تيخونوف). الآن إذا اعتبرنا الفضاء الجزئي $(0,1)^J$، نجد أنه مكافىء تبولوجيا لـ R^J، ومن ثم فهو غير سوي. إذن سواء الفضاء لا يستلزم سواء فضاءاته الجزئية.

(ii) يتبين من النظرية السابقة أيضاً، أن جداء فضاءات سوية معطاة، لا يلزم أن يكون سوياً.

تمارين (٧)

الجزء الأول

١ – ليكن X فضاء تبولوجيا، وليكن Δ الفضاء الجزئي من فضاء الجداء X × X المعرف على النحو التالي:

$$\Delta = \{ (x,x) : x \in X \}$$

بين أنه كي يكون X هاوسدورف، فيلزم ويكفي أن تكون Δ مغلقة في X × X.

٢ – يقال إن X متراص محلياً[١] إذا كان لكل نقطة في X جوار مغلق متراص.
بين أنه إذا كان X متراصاً محلياً وT_2، فحينئذ X فضاء منتظم.

٣ – إذا كان X فضاء T_1، فيقال إنه منتظم تماماً[٢] إذا كان يحقق الشرط التالي: إذا كانت A مغلقة في X، و $x \in A^c$، فثمة دالة مستمرة $f : X \longrightarrow I$ بحيث أن $f(A) = \{0\}$ و $f(x) = 1$.
بين أن الانتظام التام يستلزم الانتظام، أما العكس فغير صحيح.

الجزء الثاني

٤– بين أنه إذا كان X فضاء C_2، حينئذ كل قاعدة مفتوحة لـ X تحوي قاعدة مفتوحة قابلة للعد لـ X.

٥– بين أن R قابل للفصل بالنسبة لتبولوجيا المتممة المنتهية. هل هذا الفضاء C_2؟

٦– بين أنه إذا كان $X = \prod_j X_j$ فضاء جداء، بحيث J غير قابلة للعد، وX_j يحوي أكثر من نقطة، $\forall j \in J$، حينئذ فإن X ليس فضاءً C_2.

٧– بين أنه إذا كان X متراصاً وهاوسدورف، وكانت X قابلة للعد، فحينئذ X فضاء C_1 (ومن ثم C_2).

الجزء الثالث.

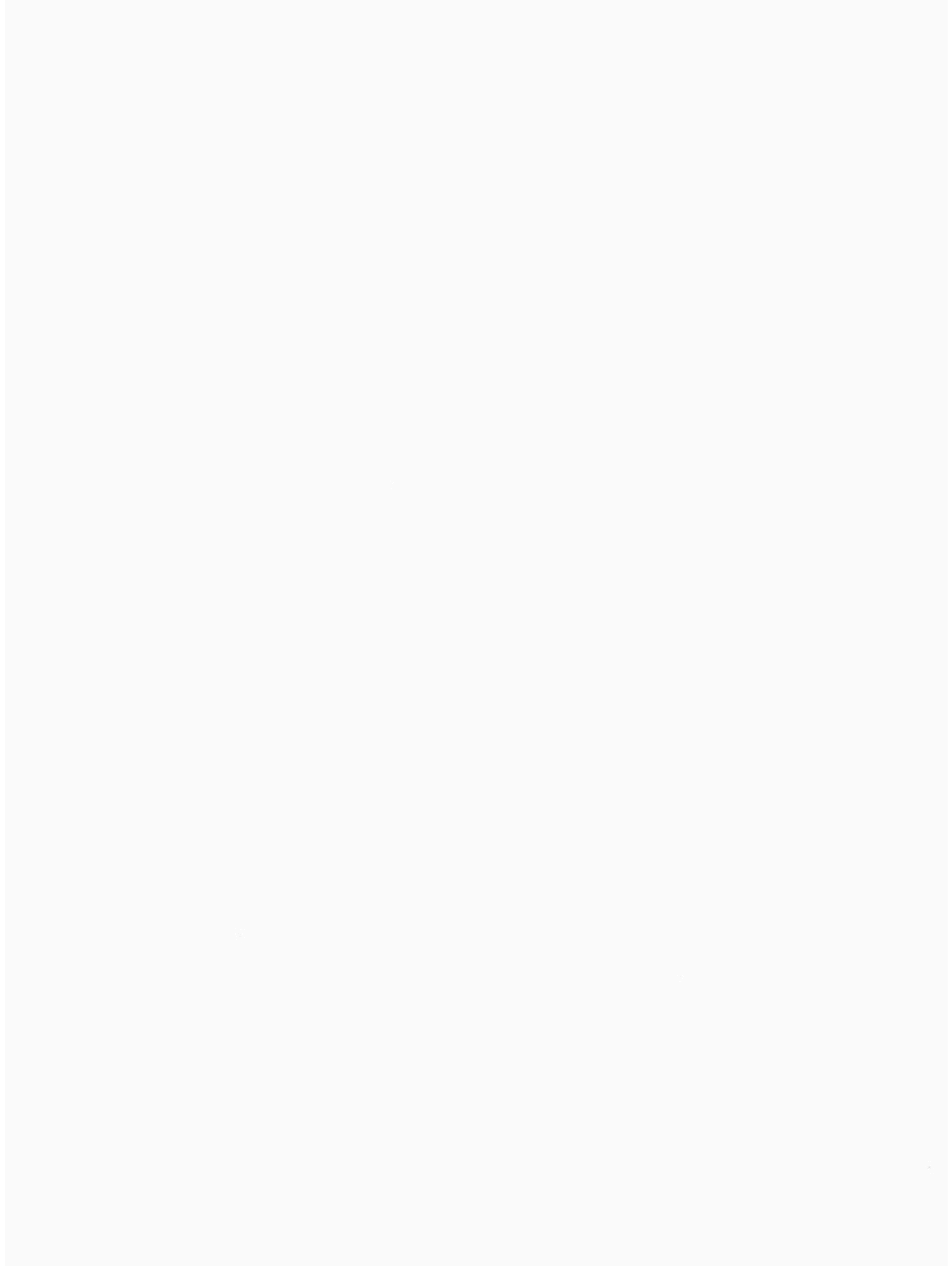
٨ – لتكن U التبولوجيا على R المولدة من القاعدة المشكلة من الفترات النصف مغلقة – مفتوحة. بين أن (RوU) فضاء سوي.

٩ – بين أن كل فضاء متراص محلياً، وT_2، وليندیلوف فضاء سوي.

---

(١) Locally compact

(٢) completely regular



الفصل الثامن

تمهيد يوريسون[1] وتطبيقاته

Urysohn's Lemma and its Applications

مقدمة

يتناول الفصل الحالي نظرية من أفضل النظريات في التبولوجيا، تعرف باسم تمهيد يوريسون، وتنص على ما يلي:

ليكن X فضاء تبولوجيا سويا. إذا كان A و B فضاءين جزئيين مغلقين في X، ولا يتقاطعان، فثمة دالة مستمرة $f: X \to I$ بحيث أن $f(A) = \{0\}$، و $f(B) = \{1\}$.

وتنبع قيمتها من النتائج الهامة التي تترتب عليها. من بين هذه النتائج، سوف نثبت نظريتين:

١. **نظرية التمديد لتيتز[2]**: إذا كان X فضاء سويا، و A فضاء جزئياً مغلقاً في X، و $f: A \to R$ دالة مستمرة، فثمة ممدد مستمر لها $f: X \to R$.

٢. **نظرية التعبير المتري ليوريسون**: ليكن H فضاء هلبرت[3]. إذا كان X فضاء C_2 وسويا، حينئذ يمكن طمر X في H، أي أن هنالك فضاء جزئياً من H مكافئاً لـ X.

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يمكن النظر لكل من تمهيد يوريسون، و نظرية التمديد لتيتز كحل جزئي لمسألة تبرز كثيراً في التبولوجيا، تعرف بمسألة التمديد[4] (أنظر [8])، وتتلخص في الآتي: إذا كان لدينا فضاءان تبولوجيان X و Y، وفضاء جزئي A من X، وراسم مستمر $f: A \to Y$، فهل ثمة ممدد مستمر $F: X \to Y$ لـ f؟ من ناحية أخرى، فيترتب على نظرية التعبير المتري ليوريسون أن مسلمة العد الثانية والسواء يستلزمان قابلية التعبير المتري.

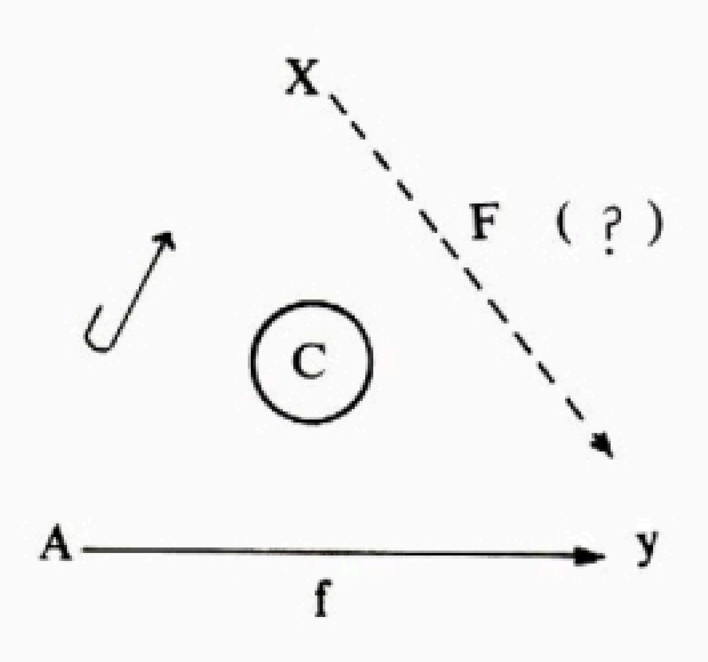
---

(١) Urysohn

(٢) Tietze

(٣) Hilbert Space

(٤) The extension problem



الشكل ٨,٠١ : مسألة التمديد

١- تمهيد يوريسون

لا شك أن اثبات هذه النظرية كان يتطلب مقدرة رياضية فائقة. وأبرز النقاط التي يرتكز عليها البرهان أنه إذا كان لدينا غطاء مفتوح لفضاء تبولوجي، ويستوفي الغطاء شروطاً معينة، فإنه يؤدي إلى دالة مستمرة معرفة على الفضاء.

٨,١ نظرية: ليكن X فضاء تبولوجيا. لتكن S مجموعة كثيفة في R، و $\mathcal{G} = \{G_s : s \in S\}$ غطاء مفتوحاً لـ X بحيث أن:

(i) $s' > s$ في S يستلزم أن $G_s \supset \bar{G}_s \supset G_s$

و (ii) $\bigcap_S G_s = \phi$

حينئذ فالدالة f المعرفة على X على النحو التالي:

$f(x) =$ حسا $\{s : x \in G_s\}$

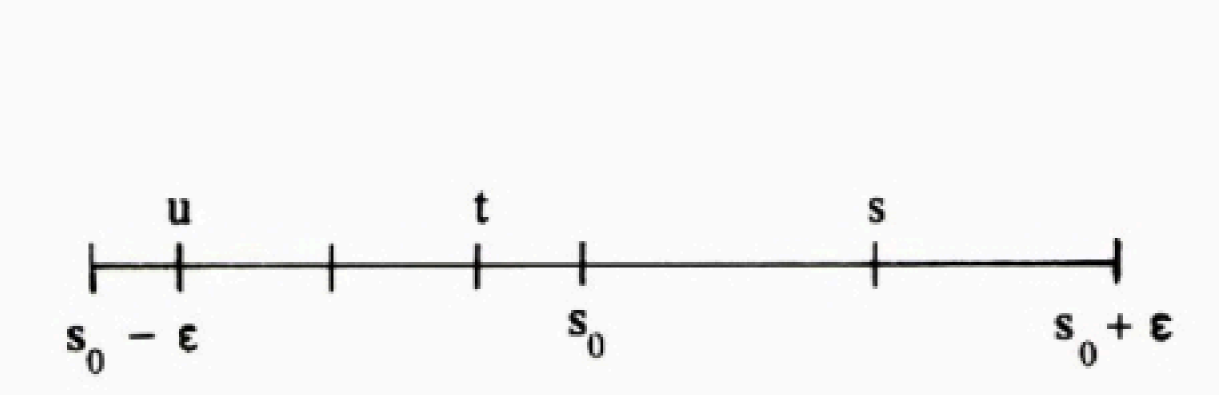
دالة مستمرة على X.

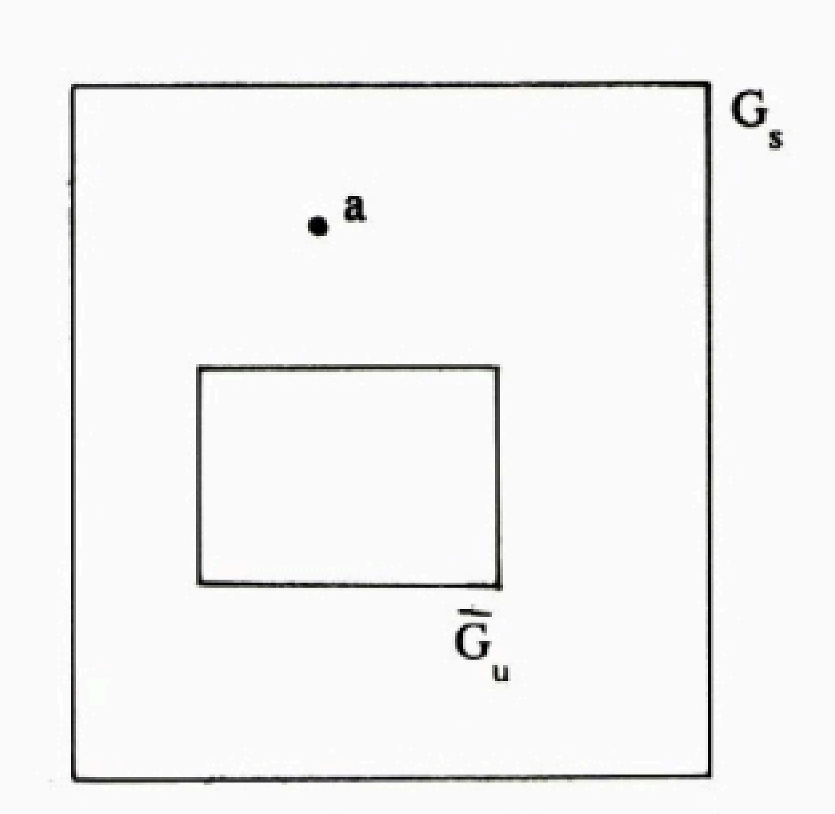
البرهان: أولا يترتب على (i) و (ii) أن العدد $f(x)$ يوجد عند كل نقطة في X.

نعتبر نقطة $a \in X$، ولنفرض أن $f(a) = s_0$. كي نبين أن f مستمرة عند a، نأخذ $\varepsilon > 0$. في ضوء تعريف f، ثمة $s \in S$ بحيث أن G_s تحوي a، و $s_0 < s < s_0 + \varepsilon$. الآن G_s جوار مفتوح لـ a، و $\forall x \in G_s$ فإن:

$f(x) < s < s_0 + \varepsilon$ ...(أ).

بما أن S كثيفة في R، فثمة $t \in S$ بحيث أن $s_0 - \frac{\varepsilon}{2} < t < s_0$ وثمة $u \in S$ بحيث أن $s_0 - \varepsilon < u < t$. استناداً على فرضية النظرية، فإن G_t تحوي $\bar{G}_u$، وفي ضوء تعريف f، فإن a لا تنتمي إلى G_t، مما





الشكل(٨,٠٢) استمرار f

يترتب عليه أن a لا تنتمي إلى $\bar{G}_u$. إذن $V = G_s - \bar{G}_u$ جوار مفتوح لـ a. علاوة على ذلك، فإن

$$s_0 - \varepsilon < u \leq f(x), \ \forall x \in V \ \ldots \ (ب)$$

يترتب على (أ) و(ب)، أنه $\forall x \in V$، فإن

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

إذن f مستمرة عند A.□

٨,٢ نظرية (تمهيد يوريسون[١]). ليكن لدينا فضاء سوى X. لتكن A و B مجموعتين مغلقتين في X، غير خاليتين، ولا تتقاطعان. حينئذ ثمة دالة مستمرة $f : X \to I$ بحيث أن $f(A) = \{0\}$، و $f(B) = \{1\}$.

البرهان: في ضوء النظرية السابقة، فإن إدراك ما نرمي إليه يتم إذا أنشأنا غطاء مفتوحاً مناسباً لـ X. من أجل ذلك، لتكن S مجموعة الأعداد الحقيقية التالية:

$$S = (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \cup T$$

حيث $T = \{p/2^n : n \in N, 1 \leq p < 2^n\}$.

نعرف الآن مجموعة مفتوحة G_s، $\forall s \in S$. نعتبر حالتين:

الحالة الأولى: $s \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. لنضع $G_s = \phi$ إذا كانت $s \in (-\infty, 0]$

و $G_s = X$ إذا كانت $s > 1$

و $G_s = B^c$ إذا كانت $s = 1$.

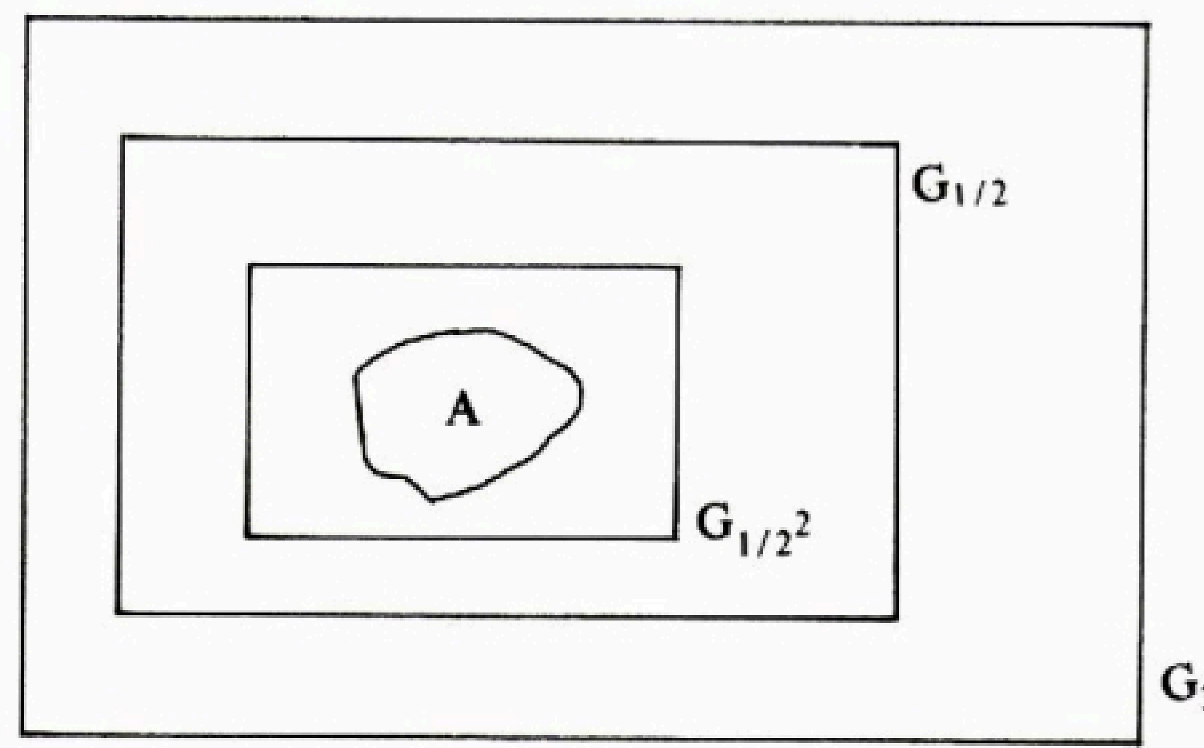
---

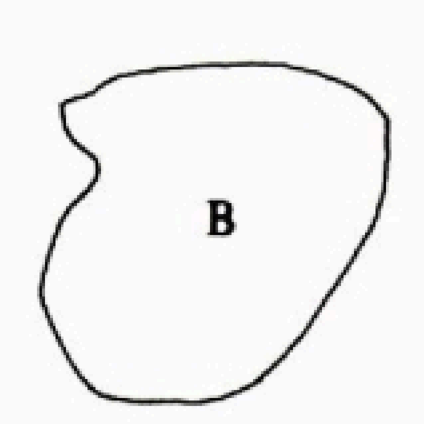
(١) Urysohn's lemma

الحالة الثانية: $s \in T$: إذ أن X فضاء سوي، فاستناداً على نظرية ٢٣ ، ٧ ، يمكننا أن نختار جواراً مفتوحاً $G_{1/2}$ لـ A بحيث أن $\bar{G}_{1/2} \subset G_1$. مرة أخرى، وباستخدام نفس النظرية، نختار جواراً مفتوحاً $G_{1/2^2}$ لـ A، وجواراً مفتوحاً $G_{3/2^2}$ لـ $G_{1/2}$ بحيث أن

$$A \subset G_{1/2^2} \subset \bar{G}_{1/2^2} \subset G_{1/2}$$

$$\bar{G}_{1/2} \subset G_{3/2^2} \subset \bar{G}_{3/2^2} \subset G_1 .$$





الشكل ٨,٠٣ : المجموعات: $G_{p/2^2}$, $1 \leqslant p < Z^2$

في المرحلة التالية، نقوم باختيار $G_{p/2^3}$، $p = 1, 3, 5, 7$. بحيث تتحقق الشروط التالية:

$$A \subset G_{1/2^3} \subset \bar{G}_{1/2^3} \subset G_{1/2^2}$$

$$\bar{G}_{1/2^2} \subset G_{3/2^3} \subset \bar{G}_{3/2^3} \subset G_{1/2}$$

$$\bar{G}_{1/2} \subset G_{5/2} \subset \bar{G}_{5/2^3} \subset G_{3/2^2}$$

$$\bar{G}_{3/2^2} \subset G_{7/2^3} \subset \bar{G}_{7/2^3} \subset G_1$$

إذ نسير على هذا المنوال، نستطيع أن نعرف $G_{p/2^n}$, $\forall\, p/2^n \in T$.

الآن نلاحظ ما يلي:

(أ) S كثيفة في R، و $\{G_s : s \in S\}$ غطاء مفتوح لـ X.

(ب) $s > s$ يستلزم أن G_s تحوي $\bar{G}_s$، $\forall\, s, s' \in S$.

(جـ) $\bigcap_S G_s = \Phi$.

استناداً على النظرية السابقة، فإن

$$f(x) = \text{حسا}\{s : x \in G_s\}$$

يُعرَّف دالة مستمرة على X. من الواضح أن $f(A) = \{0\}$، و $f(B) = \{1\}$ ، و $f(x) \in I$, $\forall$ $x \in X$. □

ملاحظات:

١ . يسمى f راسم يوريسون للزوج (B و A).

٢ . من الواضح أن نتيجة تمهيد يوريسون تظل صحيحة إذا استبدلنا I بأي فترة مغلقة أو مفتوحة. لذا فيمكننا أن نستبدل I أيضاً بالفضاء R.

٣ . يترتب على تمهيد يوريسون أن I صورة مستمرة لكل فضاء متصل سوي، يحوي أكثر من نقطة. وقد نتساءل الآن:

ما هو الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الهاوسدورف X صورة مستمرة لـ I؟.

والإجابة على ذلك: أن يكون X متراصاً، ومتصلا، ومتصلا محلياً، وقابلا للتعبير المتري. تلك هي نظرية هان – مازركيوتس(١) الشهيرة (أنظر [7]).

٢– نظرية التمديد لتيتز

كنا قد أوردنا نص هذه النظرية في مقدمة الفصل الحالي. كي يتسنى لنا تمديد الدالة f، فسوف نقوم بانشاء متسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً وبانتظام، من الدوال المستمرة على X، بحيث إننا إذا قصرناها على A، فإنها تؤول إلى f. وهذا الانشاء، يعتمد أساساً على تمهيد يوريسون.

٣,٨ نظرية: ليكن X فضاء سويا، و A فضاء جزئياً مغلقاً من X, و K عدداً موجباً. لتكن $f : A \to [-K, K]$. دالة مستمرة حينئذ ثمة دالة مستمرة:

$$F : X \to [-K/3, K/3]$$

بحيث أن $|F(x) - f(x)| \le 2K/3$, $\forall$ $x \in A$.

البرهان. لتكن B و ´B المجموعتين المغلقتين في X:

$$B = f^{-1}([K/3, K]), B' = f^{-1}([-K, -K/3])$$

---

(١) Hahn-Mazurkiewicz

يترتب على تمهيد يوريسون أنه توجد دالة مستمرة

$$F : X \to [-K/3, K/3]$$

بحيث أن $F(B) = K/3$ ، و $F(B') = -K/3$. إذن $|F(x) - f(x)| \leq 2K/3$ ، $\forall x \in A$. □

تعريف. إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X,ودالة محدودة f على X ، **فالقيمة المطلقة**(١) لـ f على X ، ونرمز لها بـ $\|f\|_X$ ، هي العدد

$$\|f\|_X = \text{حعا}\{|f(x)| : x \in X\}$$

٨,٤ تمهيد: إذ كان X فضاء تبولوجيا ، وf_n دالة مستمرة على X ، $\forall n \in N$ ، وإذا كانت $\sum_1^{\infty} \|f_n\|_x$ متسلسلة تقاربية ، فإن $\sum_1^m f_n$ تؤول إلى دالة مستمرة على X ، عندما تؤول m إلى ∞

البرهان: لتكن $s_m : X \to R$ الدالة المعرفة على النحو التالي:

$$s_m(x) = \sum_1^m f_n(x), \quad \forall x \in X, \ \forall m \in N.$$

بما أن $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_x$ ، فيترتب على اختبار المقارنة ، أن s_m تؤول إلى دالة $s : X \to R$ عندما تؤول m إلى ∞ .

نبين الآن أن s مستمرة عند كل نقطة $a \in X$. لتكن $\varepsilon > 0$. إذن ثمة $m \in N$ بحيث أن:

$$|s(x) - s_m(x)| \leq \sum_{m+1}^{\infty} \|f_k\|_X < \varepsilon/3 ,$$

$\forall x \in X$. بما أن s_m مستمرة عند a ، فثمة جوار مفتوح U لـ a بحيث أن:

$$|s_m(x) - s_m(a)| < \varepsilon/3 , \quad \forall x \in U.$$

من ثم ، فإن:

$$|s(x) - s(a)| \leq |s(x) - s_m(x)| + |s_m(x) - s_m(a)| + |s_m(a) - s(a)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$\forall x \in U$. إذن s مستمرة عند a . □

٨,٥ نظريـة (نظرية التمديد لتيتز(٢)**)**. ليكن X فضاء سويا و A فضاء جزئياً مغلقاً من X. لتكن $f : A \to [-1, 1]$ دالة مستمرة. حينئذ ثمة دالة مستمرة:

---

(١) The norm

(٢) The Tietze' extension theorem

$$F:X \to [-1 \text{ و } 1]$$

بحيث أن $F|A = f$.

البرهان: يترتب على نظرية ٨،٠٣ أنه ثمة دالة مستمرة $f_1 : X \to [-1 \text{ و } 1]$ بحيث أن $|f_1(a) - F(a)| \leq 2/3$ ، $\forall\ a \ni A$. لتكن $h_1 : A \to [-1 \text{ و } 1]$ الدالة $h_1 = f - f_1$ حينئذ $\|h_1\|_A \leq 2/3$ نطبق الآن نظرية ٨,٠٣ على h_1 ، لنستنتج أنه ثمة دالة مستمرة $f_2 : X \to [-1,1]$ بحيث أن $\|f_2\|_X \leq 2/3^2$ ، و $\|h_1 - f_2\|_A \leq (2/3)^2$. نعرف $h_2 : A \to [-1,1]$ كما يلي:

$$h_2 = f - (f_1 + f_2)$$

بنفس الحجة السابقة، فثمة دالة $f_3 : X \to [-1,1]$ بحيث أن $\|f_3\|_X \leq 2^2/3^3$ ، و $\|h_2 - f_3\|_A \leq 2^3/3^3$. بتكرار هذه العملية، نحصل على متوالية (f_n) من الدوال المستمرة على X ، ومتوالية (h_n) من الدوال المستمرة على A بحيث أن:

(i) $h_n = f - (f_1 + \dots + f_n)$

(ii) $\|f_n\|_X \leqslant 2^{n-1}/3^n$, $\forall\ n \ni N$

(iii) $\|h_n\|_A \leqslant 2^n/3^n$, $\forall\ n \ni N$.

يترتب على (ii)، أن $\Sigma \|f_n\|_X$ متسلسلة تقاربية، ولذا فإن $\sum_1^\infty f_n = F$ تعرف دالة مستمرة على X (تمهيد ٨،٤). يترتب على (iii) أن مقصور F على A يساوي f. وفي ضوء (ii) فإن

$$|F(x)| \leq \sum_1^\infty \left(\frac{2^{n-1}}{3^n}\right) = 1$$

أي أن $F(X)$ محتواة في $[-1,1]$. □

ملاحظة: من الجلي أن نتيجة نظرية تيتز تظل صحيحة إذا استبدلنا $[-1,1]$ بأي فترة مغلقة أو مفتوحة أو بالفضاء R. إذن يمكن استبدالها أيضاً بالفضاء R^n ، لأنه إذا كانت $f : A \to R^n$ ، فإن كلا من الدوال المركبة لـ f قابلة للتمديد لدالة على X ، ومن ثم يكون لدينا ممدد لـ f على X.

٣– نظرية التعبير المتري ليوريسون

في هذا الجزء، نبين كيف يتسنى لنا أن نطمر كل فضاء تبولوجي C_2 ومنتظم في فضاء هلبرت.

تعريف:

(١) إذا كان X و Y فضاءين تبولوجيين، و $f : X \to Y$ راسماً مستمراً، فيقال إن f يطمر[١] X في Y إذا كان $f : X \to f(X)$ تكافؤاً تبولوجياً على الفضاء الجزئي f(X) من Y.

(٢) لتكن H مجموعة المتواليات الحقيقية (x_n) بحيث أن $\sum_1^{\infty} x_n^2$ متسلسلة تقاربية. ليكن d المترك على H، المعروف على النحو التالي:

$$d((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

يسمى الفضاء المتري (H,d) **فضاء هلبرت**[٢]، ويرمز له بـ H. **مكعب هلبرت**[٣] H_c هو الفضاء الجزئي المكون من كل المتواليات الحقيقية (x_n) بحيث أن $0 \le x_n \le 1$، $\forall n \in N$.

جدير بنا أن نشير إلى أن أندرسون[٤] قد أثبت (١٩٦٦م) أن H مكافيء تبولوجيا لـ R^N. وفي الحقيقة، فإن خواص H قد استحوذت على كثير من الاهتمام. أما الخاصة التي تهمنا الآن، فتتعلق بالنظرية التالية:

٨,٦ نظرية (نظرية التعبير المتري ليوريسون[٥] (١٩٢٤م)). إذا كان X فضاء تبولوجيا C_2 ومنتظماً، فثمة راسم مستمر $f:X \to H$ يطمر X في H.

البرهان: بما أن X فضاء C_2 ومنتظم، فإنه فضاء سوي (نظرية ٧,٢٤). لتكن $\mathcal{B} = \{B_n : n \in N\}$ قاعدة مفتوحة لـ X. إذا أخذنا $a \in X$، فثمة جوار B_j لـ a بحيث أن $B_j \in \mathcal{B}$. يترتب على سواء X أنه يوجد جوار $B_i \in \mathcal{B}$ لـ a بحيث أن B_j يحوي $\overline{B}_i$ (نظرية ٧,٢٣). إذن المجموعة S المشكلة من كل الأزواج (B_i, B_j) بحيث أن B_j تحوي لصاقة B_i، مجموعة قابلة للعد وغير خالية. استناداً على تمهيد يوريسون، $\forall (B_i, B_j) \in S$، ثمة دالة مستمرة $f_n : X \to I$ بحيث أن $f_n(\overline{B}_i) = \{0\}$ و $f_n(B_j^c) = \{1\}$. إذا كانت S مجموعة منتهية، وعدد عناصرها m، فنعرف $f_k : X \to I$ بأنها الدالة الثابتة 0، $\forall k > m$. الآن نعرف الراسم:

$$f : X \to H$$

على النحو التالي

$$f(x) = \left(f_1(x), \frac{1}{2} f_2(x), \frac{1}{3} f_3(x), \ldots\right)$$

---

(١) Embeds

(٢) Hilbert space

(٣) The Hilbert cube

(٤) Anderson

(٥) The Urysohn metrization theorem

نبين أدناه أن:

(i) f راسم مستمر.

(ii) f آحادي.

(iii) $f^{-1}: f(X) \to X$ راسم مستمر.

لنفرض أن $a \in X$. إذا كانت $\varepsilon > 0$، فثمة عدد طبيعي p بحيث أن $\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{8}$. علاوة على ذلك، يترتب على استمرار f_n، $\forall\, n \le p$، أنه يوجد جوار مفتوح U_n لـ a بحيث أن $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2p}}$، $\forall\, x \in U$. لنضع $U = \bigcap_1^p U_n$. من ثم، إذا كانت $x \in U$، فحينئذ:

$$d(f(x), f(a)) = \left(\sum_1^{\infty} \left(\frac{f_n(x) - f_n(a)}{n} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\le \left[\sum_1^p \frac{(f_n(x) - f_n(a))^2}{n^2} + \sum_{p+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \right]^{1/2}$$

$$< \left[\left(\sum_1^p \frac{\varepsilon^2}{2p} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \right]^{1/2}$$

$$= \varepsilon$$

إذن f مستمر عند a.

(ii) f آحادي: ذلك لأنه إذا كانت a و $b \in X$، و $a \neq b$، فبما أن X فضاء سوي، ثمة جواران مفتوحان B_i و B_j لـ a بحيث أن B_j تحوي $\overline{B}_i$، و b تنتمي إلى متممة B_j. لتكن f_n الدالة المعرفة على X، وتقترن بالزوج (B_i, B_j). بما أن $f_n(\overline{B}_i) = \{0\}$ و $f_n(B^c_j) = \{1\}$ إذن $f_n(a) = 0$ و $f_n(b) = 1$. من ثم، فإن $f(a) \neq f(b)$. هذا يثبت (ii).

(iii) استمرار f^{-1}. نضع $f(X) = Y$، و $g = f^{-1}$ من Y إلى X. لنفرض أن $s \in Y$، و $t = g(s)$، أي أن $f(t) = s$. ليكن U جواراً مفتوحاً لـ t في X. كما بُيِّن من قبل، فثمة جواران مفتوحان B_i و B_j لـ t بحيث أن B_i و $B_j \in \mathcal{B}$، و B_j يحوي $\overline{B}_i$، و U تحوي B_j. لتكن f_l الدالة المستمرة على X والتي تقترن بـ (B_i, B_j). إذا كانت s و $y \in Y$، بحيث أن $d(s,y) < 1/2l$ حينئذ فإن $g(y) = x \in U$، لأنه إذا فرضنا جدلا أن $x \in U^c$ فيترتب على ذلك أن $f_l(x) = 1$، ومن ثم فإن:

$$d(s,y)=d(f(t),f(x)) \geq \frac{|f_l(t)-f_l(x)|}{l} > 1/2l$$

إذن صورة القرص المفتوح $B(s\,;\,\frac{1}{2l})$، بالنسبة للراسم g، محتواة في U. إذن g راسم مستمر. □

تمارين (٨)

الجزء الأول

١ – بين أن العكس لتمهيد يوريسون صحيح.

٢ – بين أنه إذا كان X فضاء T_2، ومتصلا، وقابلا للعد، وليس فضاء النقطة الواحدة، فحينئذ X فضاء غير منتظم.

٣ – بين أنه ليس ثمة فضاء قابل للعد، يحوي أكثر من نقطة، ويكون هاوسدورف ومتصلا بالمسارات.

الجزء الثاني:

٤ – ليكن X فضاء T_1 ويحقق الشرط التالي:

إذا كان A فضاء جزئياً مغلقاً في X، وY فضاء تبولوجياً، و$f:A \to Y$ راسماً مستمراً، حينئذ ثمة ممدد لـ f على X. بين أن X فضاء سوي.

٥ – ليكن X فضاء سوياً، و A فضاء جزئياً مغلقاً من X، و $f:A \to S^n$ راسماً مستمراً. بين أن f يقبل التمديد لراسم مستمر على جوار مفتوح لـ A.

٦ – بين أنه إذا كان X فضاء سويا، وله مركبة غير قابلة للعد، فثمة دالة مستمرة غامرة $f:X \to I$.

الجزء الثالث:

٧ – ليكن X فضاء متراصاً وهاوسدورف. بين أن X فضاء C_2 إذاً وإذا فقط كان X قابلا للتعبير المتري.

٨ – أورد مثالا لفضاء متراص وهاوسدورف، وقابل للفصل، ولكنه غير قابل للتعبير المتري.

٩ – بين أن المكعب $I^{\aleph}$ مكافىء لمكعب هلبرت.

١٠ – بين أن فضاء هلبرت H قابل للفصل وتام ولكنه غير متراص محلياً. بين أن داخل $H_c = \phi$.

١١ – ليكن (X,d) فضاء مترياً متراصاً، ويحقق الشرط التالي: إذا كان $f:X \to X$ مستمراً، و $\varepsilon > 0$، حينئذ ثمة $x_\varepsilon \in X$ بحيث أن $d(f(x_\varepsilon),x_\varepsilon) < \varepsilon$. بين أن X يتمتع بخاصة النقطة الثابتة: أي أن لكل راسم مستمر $f:X \to X$ نقطة ثابتة.

من ثم، أثبت أن H_c يتمتع بخاصة النقطة الثابتة.

الفصل التاسع

الزمرة الأساسية

The Fundamental Group

مقدمة

الزمرة الأساسية من ابتداعات هـ . بوانكاريه، مؤسس التبولوجيا الجبرية. ففي عام ١٨٩٥ م، أورد بوانكاريه أسلوباً يقرن بكل فضاء تبولوجي X، ونقطة x_o ثابتة فيه، زمرة $\pi_1(X,x_o)$ ، بحيث إذا كان $f: X \rightarrow Y$ تكافؤا تبولوجياً، نشأ عنه تشاكل تقابلي $f_*: \pi_1(X,x_o) \rightarrow \pi_1(Y,f(x_o))$.

ويعتمد تعريف الزمرة الأساسية على مفهوم يُعرَف بالهموتوبيا، ويتعلق، من الوجهة الحدسية، بإمكانية تشويه راسم مستمر إلى راسمٍ مستمر آخر. فحين نعتبر المسارات المغلقة (العرى) عند نقطة ثابتة في فضاء تبولوجي، نجد أنها تنقسم، على أساس علاقة الهموتوبيا، إلى فصول تكافؤ، تشكل زمرة، وهي ما يطلق عليها اسم الزمرة الأساسية. وتكون هذه الزمرة تافهة إذا أمكن تقليص كل عروة في الفضاء إلى نقطة فيه.

ولقد أمكن حساب الزمرة الأساسية لعدد كبير من الفضاءات، فأدى ذلك إلى نتائج هامة، فيما يتعلق بمسألة التصنيف، ومسألة التمديد، وغيرهما من المسائل التبولوجية. وعلى سبيل المثال، فإنه إذا كان لدينا سطحان متراصان، فلكي يكونا متكافئين تبولوجياً، فيلزم ويكفي أن تكون زمرتاهما الأساسيتان متشاكلتين تقابلياً.

في هذا الفصل، نحسب الزمرة الأساسية لـ S^n ، $1 \leq n$، فنبين أنها تساوي Z عندما $1 = n$، وأنها الزمرة التافهة فيما عدا ذلك. وباستخدام هاتين النتيجتين، يتسنى لنا إثبات نظرية النقطة الثابتة لبراور في البعد 2، ونظرية بورسك - الم في البعد 2. وفضلاً عن ذلك، فيسهل الوصول عندئذ إلى أن R^n غير مكافيء تبولوجياً لـ R^2 ، $n \neq 2$.

ويمثل هذا الفصل مدخلاً موجزاً للتبولوجيا الجبرية، ويهدف إلى إعطاء فكرة عن الأسلوب الذي

ينتهجه التبولوجيون الجبريون في معالجة المسائل التبولوجية بإستخدام الجبر، وهو أسلوب أثبت فعالية فائقة (انظر [15] مثلاً).

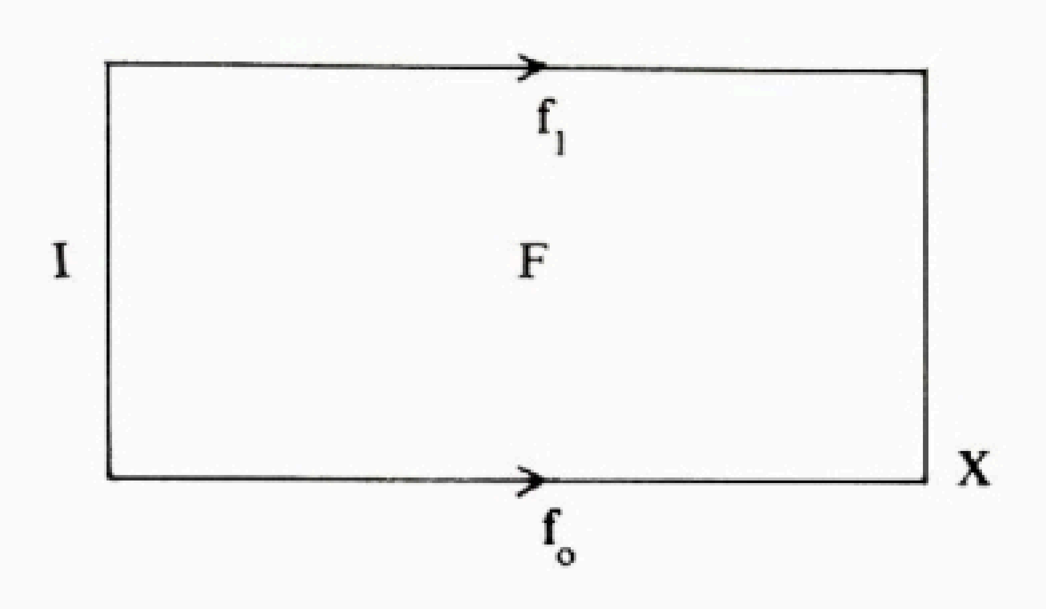
١- الهموتوبيا

تعريف. إذا كان X و Y فضاءين تبولوجيين، وكان $f_o,f_1:X \to Y$ راسمين مستمرين، فيقال إن f_o **مكافىء هموتوبيا**[١] لـ f_1، ويرمز لذلك بـ $f_o \simeq f_1$، إذا كان ثمة راسم مستمر $F:X\times I \to Y$ بحيث أن

(i) $F(x,o)=f_o(x)$, $\forall\, x \in X$.

(ii) $F(x,1)=f_1(x)$, $\forall\, x \in X$.

حينئذ يقال إن F **هموتوبيا**[٢] من f_o إلى f_1، ويعبر عن ذلك بالشكل ٩,١ .



الشكل (٩,٠١) **F هموتوبيا من f_o إلى f_1**

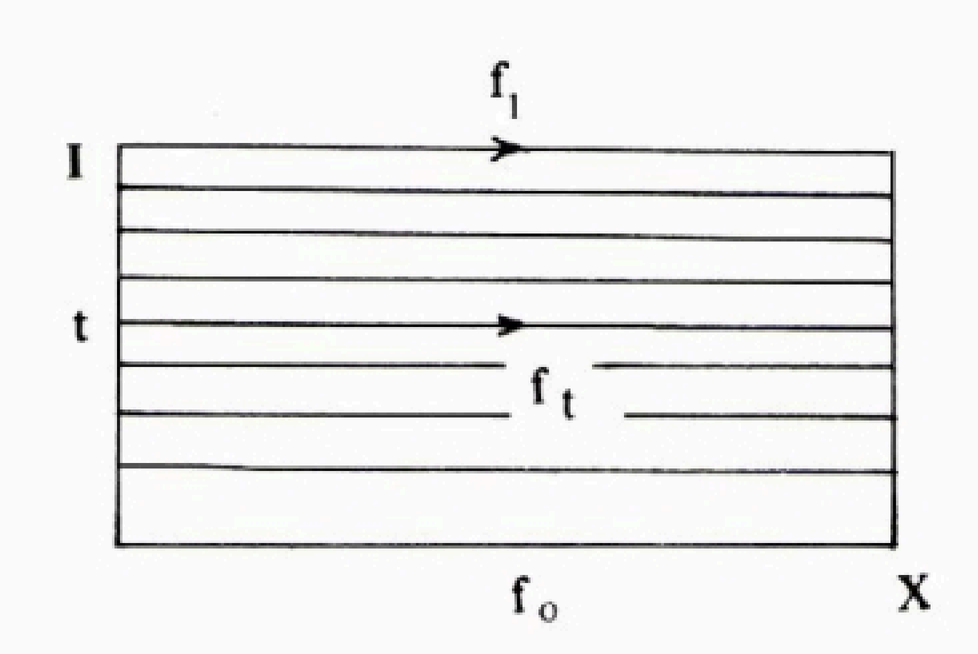
ملاحظات

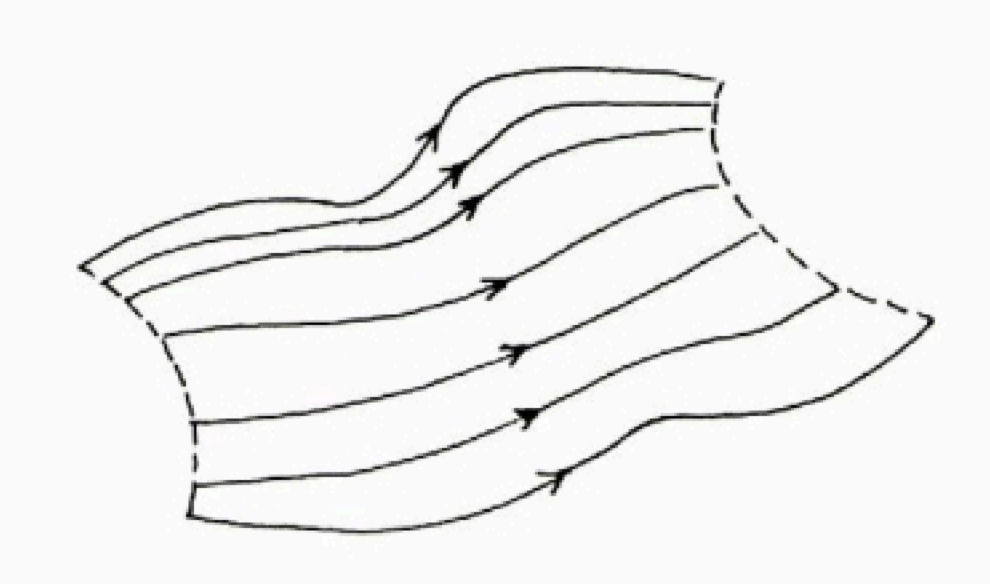
(أ). إذا كانت F هموتوبيا من f_o إلى f_1، وكان $f_t:X \to Y$ الراسم: $f_t(x)=F(x,t)$, $\forall\, x \in X$، و $\forall\, t \in I$، فحينئذ f_t راسم مستمر. إذا تخيلنا أن t تمثل الزمن، فيكون لدينا تشويه مستمر f_t يبدأ عند $t=O$ بـ f_o، وينتهي عند $t=1$، بـ f_1.

---

(١) Homotopic

(٢) Homotopy





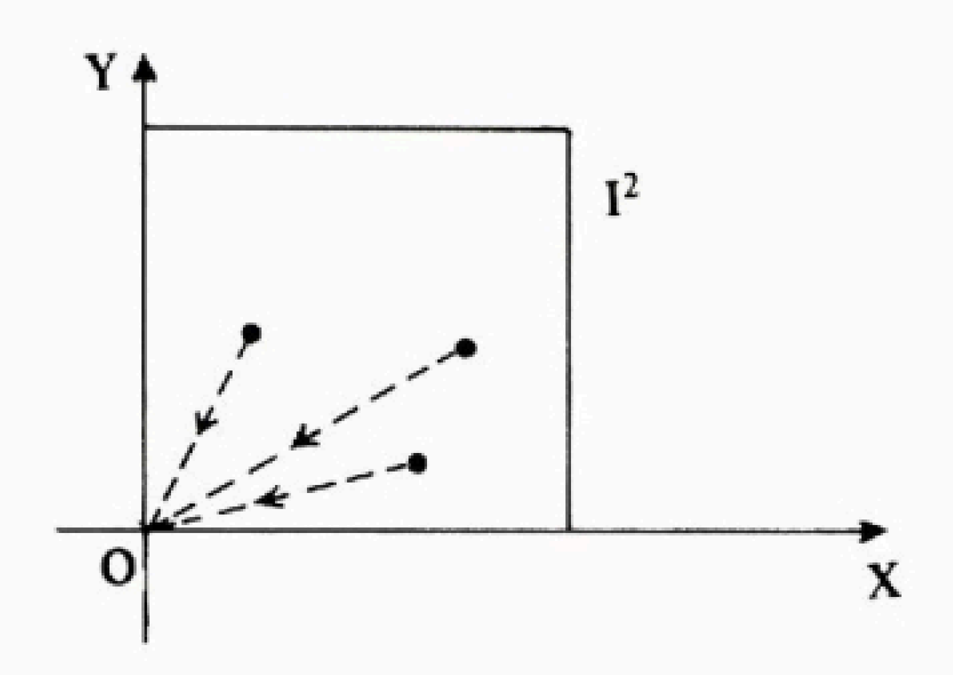
الشكل (٩,٢) التشويه المستمر

(ب). إذا كان لدينا f_o و f_1 من X إلى Y، وإذا عرفنا $f{:}X\times O \cup X\times 1 \rightarrow Y$ على النحو التالي: $f(x,o)=f_o(x)$، و$f(x,1)=f_1(x)$، $\forall\, x \in X$، حينئذ فإن $f_o \simeq f_1$ إذا وإذا فقط كان f قابلاً للتمديد على $X\times I$. مرة أخرى، إذن، نحن نتعامل مع مسألة التمديد (انظر مقدمة الفصل الثامن).

٩,١ **مثال**. نعتبر المربع I^2 والمستوى الاقليدي R^2. ليكن $f_o,f_1{:}I^2 \rightarrow R^2$ راسم التضمين والراسم الثابت $f_1(x)=O$، على التوالي. حينئذ فإن

$$F{:}I^2\times I \rightarrow R^2$$

حيث: $F(x,t)=(1-t)\,x$، $\forall\, x \in I^2$، $\forall\, t \in I$، هموتوبيا من f_o إلى f_1.

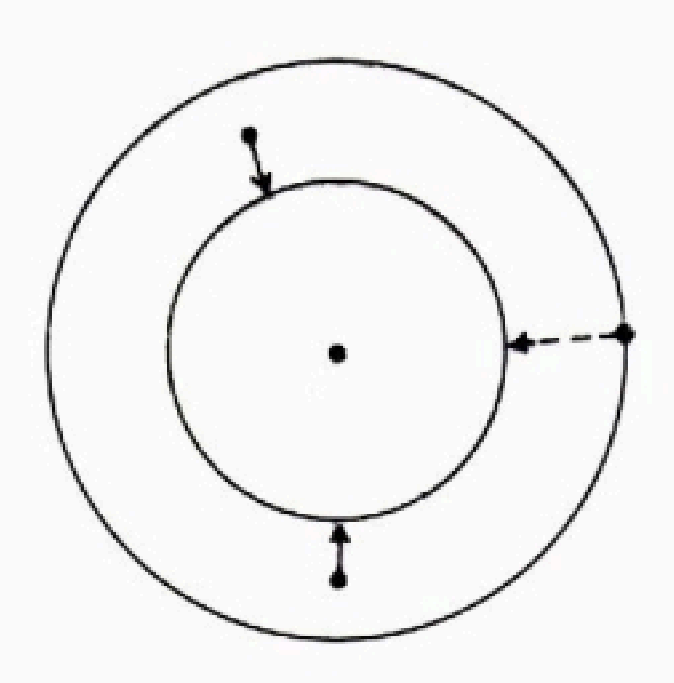


الشكل (٩,٣) تكافؤ راسم التضمين والراسم الثابت من I^2 إلى R^2

٩,٢ **مثال**. لتكن X الحلقة: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. ليكن f_o راسم المتطابقة لـ X، وليكن $f_1{:}X \rightarrow X$

الراسم الذي يرسل $a \in X$ إلى $\frac{1}{\|a\|} a \in S^1$. حينئذ فإن $f_1 \simeq f_0$ عبر الهموتوبيا: $F: X \times I \to X$ حيث

$$F(a,t) = (1-t)\, a + \frac{t}{\|a\|}\, a, \ \forall a \in X, \ \forall t \in I.$$



الشكل (٩,٤) تكافؤ f_0 و f_1

٩,٣ مثال. إذا اعتبرنا راسم المتطابقة للفضاء المتقطع $X = \{a,b\}$، نجد أنه غير مكافىء هموتوبيا للراسم الثابت $f(x)=a, \forall x \in X$. لأنه إذا فرضنا جدلاً أن $F: X \times I \to X$ هموتوبيا من id_X إلى f، حينئذ فإن $\sigma(t) = F(b,t), \forall t \in I$، مسار في X من b إلى a. هذا يتناقض مع إتصال الفضاء I.

٩,٤ نظرية. إذا كان $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$، و $g_0 \simeq g_1 : Y \to Z$، حينئذ فإن $g_0 o f_0 \simeq g_1 o f_1$.

البرهان. لتكن F هموتوبيا من f_0 إلى f_1، و G هموتوبيا من g_0 إلى g_1. نعرف هموتوبيا H من $g_0 o f_0$ إلى $g_1 o f_1$ على النحو التالي:

$H(x,t) = G(F(x,t),t) \ \forall x \in X, \forall t \in I$. أي أن $h_t = g_t o f_t, \forall t \in I$ □

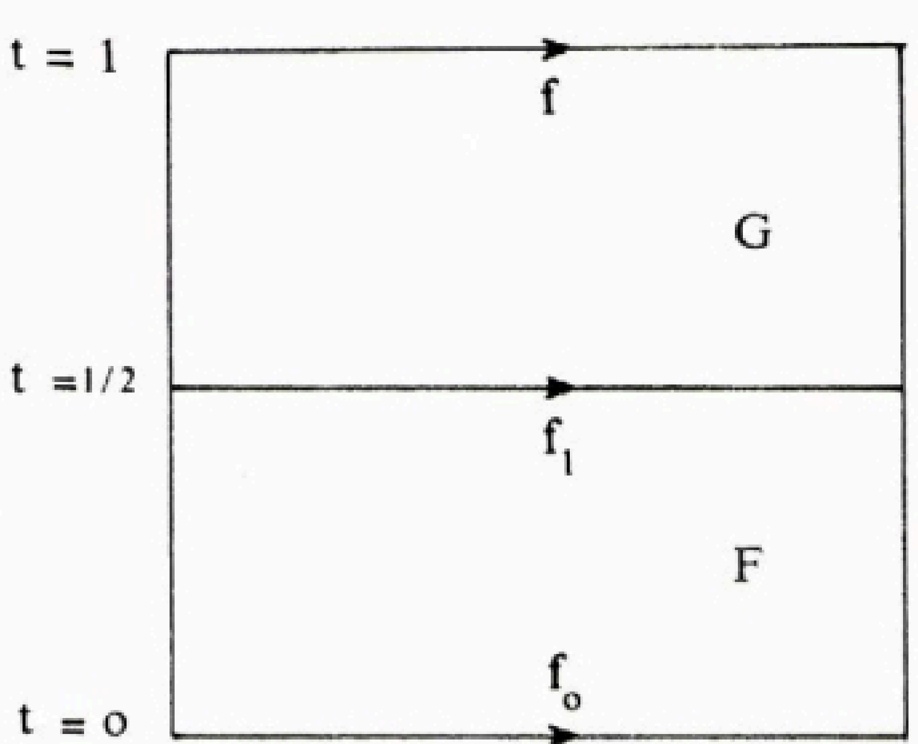
٩,٥ نظرية. إذا كان X و Y فضاءين تبولوجيين، حينئذ فإن العلاقة $\simeq$ علاقة تكافؤ على مجموعة الرواسم المستمرة من X إلى Y.

البرهان $\simeq$ علاقة منعكسة: ذلك لأنه إذا كان $f: X \to Y$ راسماً مستمراً، فإن $F: X \times I \to Y$ حيث $F(x,t) = f(x), \forall x \in X, \forall t \in I$، هموتوبيا من f إلى f.

$\simeq$ علاقة متناظرة: ليكن $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$. لتكن F هموتوبيا من f_0 إلى f_1. نعرف هموتوبيا G من f_1 إلى f_0 على النحو التالي:

$G(x,t) = F(x,1-t), \forall x \in X, \forall t \in I$.

$\simeq$ علاقة متعدية: ليكن $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$، و $f_1 \simeq f_2 : X \to Y$. لتكن F هوموتوبيا من f_0 إلى f_1، و G هوموتوبيا من f_1 إلى f_2. نعرف $H : X \times I \to Y$ على النحو التالي: $H(x,t) = F(x,2t), \forall x \in X$، و $\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$، و $H(x,t) = G(x,2t-1), \forall x \in X$، و $\forall t \in [\frac{1}{2},1]$. يترتب على نظرية الالصاق أن H راسم مستمر. بما أن $h_0 = f_0$، و $h_1 = f_2$، إذن H هوموتوبيا من f_0 إلى f_2. من ثم، فإن $\simeq$ علاقة متعدية، إذن $\simeq$ علاقة تكافؤ. □



الشكل(٩,٥)الهموتوبيا علاقة متعدية

تسمى فصول التكافؤ الناشئة عن هذه العلاقة **بفصول الهموتوبيا**[١] للرواسم المستمرة من X إلى Y.

من ناحية أخرى، فإن الهموتوبيا تؤدي إلى علاقة تكافؤ على مجموعة الفضاءات التبولوجية:

تعريف. إذا كان لدينا فضاءان تبولوجيان X و Y، فيقال إن X **مكافيء هوموتوبيا**[٢] لـ Y، ويرمز لذلك بـ $X \simeq Y$، إذا كان ثمة راسمان مستمران $f : X \to Y$، و $g : Y \to X$ بحيث أن $g o f \simeq id_X$ و $f o g \simeq id_Y$.

حينئذ يقال إن f **تكافؤ هموتوبي**[٣] من X إلى Y، وأن g **معكوسه الهموتوبي**.

٩,٦ مثال. في ضوء مثال ٩,٢، فإن الراسم:

$$h : X \to S^1$$

$$h(a) = \frac{1}{\|a\|} . a \quad , \forall a \in X$$

---

(١) Homotopy classes

(٢) Homotopic

(٣) Homotopy equivalence

تكافؤ هموتوبي من الحلقة $X: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$، إلى الدائرة S^1. أما معكوسه الهموتوبي فهو راسم التضمين من S^1 إلى X.

٩,٧ مثال. إذا كان $f: X \to Y$ تكافؤا تبولوجيا، فحينئذ يكون X مكافئاً هموتوبيا لـ Y عبر التكافؤ الهموتوبي f.

سوف نبين فيما يلي أن R^n مكافيء هموتوبيا لفضاء النقطة الواحدة.

تعريف. يقال إن الفضاء التبولوجي X **قابل للانكماش**[١]، إذا كان راسم المتطابقة id_X مكافئاً هموتوبيا لراسم ثابت على X.

٩,٨ مثال. R^n يقبل الانكماش، لأن:

$$F: R^n \times I \to R^n$$

$$F(x,t) = (1-t).x, \quad \forall\, x \in R^n, \forall\, t \in I$$

هموتوبيا من id_{R^n} إلى الراسم الثابت O.

٩,٩ نظرية. كي يكون الفضاء التبولوجي X قابلاً للانكماش فيلزم ويكفي أن يكون X مكافئاً هموتوبيا لفضاء النقطة الواحدة.

البرهان. لنفرض أن X قابل للانكماش. إذن ثمة $x_o \in X$ بحيث أن id_X مكافيء هموتوبيا للراسم الثابت x_o. من ثم، فإن $X \to \{x_o\}$ تكافؤ هموتوبي.

ننتقل الآن إلى العكس. إذا كان $f: X \to \{P\}$ تكافؤاً هموتوبياً، و $g: \{P\} \to X$ معكوسه الهموتوبي، حينئذ فإن id_X مكافيء هموتوبيا للراسم الثابت $g(P)$.

٢- الزمرة الأساسية

كي يتسنى لنا تعريف الزمرة الأساسية، نقوم أولاً بتعريف علاقة الهموتوبيا للمسارات التي لها نفس نقاط الابتداء والانتهاء.

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا، و $\sigma_0, \sigma_1: I \to X$ مسارين بحيث أن $x_o = \sigma_o(o) = \sigma_1(0)$ و $x_1 = \sigma_o(1) = \sigma_1(1)$. يقال أن σ_o **مكافيء**[٢] لـ σ_1، أو σ_o **مكافيء هموتوبيا** لـ σ_1 بالنسبة لـ $\{0,1\}$، إذا كان ثمة راسم مستمر:

$$F: I \times I \to X$$

---

(١) Contractible

(٢) Equivalent

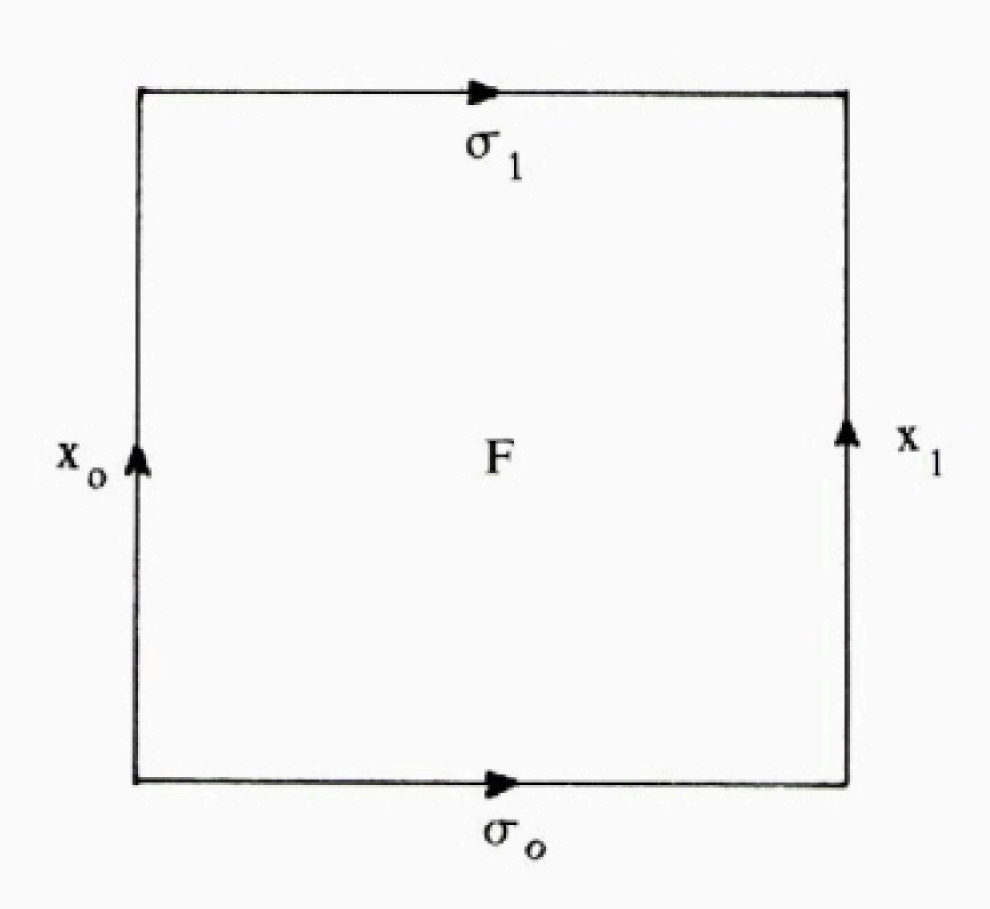
بحيث أن:

$$\text{(i)}\quad \sigma_o(s) = F(s,o),\ \forall s \in I$$

$$\text{(ii)}\quad \sigma_1(s) = F(s,1),\ \forall s \in I$$

$$\text{(iii)}\quad x_o = F(O,t) \text{ ، و } x_1 = F(1,t),\ \forall t \in I$$

حينئذ يقال إن F **هموتوبيا نسبية**[١] من σ_o إلى σ_1.



الشكل (٩،٦) الهموتوبيا النسبية

من الجلي أن علاقة الهموتوبيا النسبية علاقة تكافؤ. سوف نرمز لفصل التكافؤ الذي يمثله المسار σ بـ $[\sigma]$، وإذا كان σ_o مكافئاً لـ σ_1، فإننا نرمز لذلك بـ $\sigma_o \sim \sigma_1$.

٩،١٠ مثال. إذا كان σ_o و σ_1 المسارين في القرص المغلق D^2، المعرفين على النحو التالي:

$$\sigma_o(s) = e^{i\pi s} \text{ ، و } \sigma_1(s) = e^{-i\pi s},\ \forall s \in I \text{ ،}$$

فحينئذ $\sigma_o \sim \sigma_1$. ذلك لأن:

$$F : I \times I \longrightarrow D^2$$

$$F(s,t) = (1-t)\, e^{i\pi s} + t.e^{-i\pi s},\ \forall (s,t) \in I \times I$$

هموتوبيا نسبية من σ_o إلى σ_1.

---

(١) Relative homotopy

لنتذكر أنه إذا كان σ مساراً من x_0 إلى x_1، و μ مساراً من x_1 إلى x_2، في الفضاء X، فجداء σ و μ هو المسار:

$$\sigma \cdot \mu(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & o \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

٩,١١ تمهيد. إذا كان σ_o، و σ_1 و μ_o، و μ_1 مسارات في الفضاء التبولوجي X بحيث أن σ_o مكافيء لـ σ_1، و μ_o مكافيء لـ μ_1، و $\sigma_o(1) = \mu_o(o)$، حينئذ فإن $\sigma_o \cdot \mu_o$ مكافيء لـ $\sigma_1 \cdot \mu_1$

البرهان. لتكن F هموتوبيا نسبية من σ_o إلى σ_1، و G هموتوبيا نسبية من μ_o إلى μ_1. إذا عرفنا:

$$F.G : I \times I \longrightarrow X$$

على النحو التالي:

$$F.G(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & o \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

حينئذ تكون لدينا هموتوبيا نسبية من $\sigma_o \cdot \mu_o$ إلى $\sigma_1 \cdot \mu_1$ □

في ضوء هذا التمهيد، يمكننا الآن تعريف جداء فصلي التكافؤ $[\sigma]$ و $[\mu]$.

تعريف. ليكن σ مساراً من x_0 إلى x_1، و μ مساراً من x_1 إلى x_2، في الفضاء X. نعرف جداء[1] $[\sigma]$ و $[\mu]$، ونرمز له بـ $[\sigma] . [\mu]$، بأنه فصل التكافؤ $[\sigma \cdot \mu]$.

وتعطي النظرية الهامة التالية أهم خواص هذا الجداء. ولا يفوتنا أن نلاحظ غياب الخاصة الابدالية، فالحقيقة أنه حتى إذا كان كلا الجداءين $[\sigma] . [\mu]$ و $[\mu] . [\sigma]$ معرفاً $(x_o = x_2)$، فإن ذلك لا يقتضي أن يكونا متساويين.

لنتذكر الآن أنه إذا كانت لدينا فترة مغلقة $[a,b]$، $a < b$، فالتكافؤ الطبيعي $h : [a,b] \longrightarrow I$ يعرف على النحو التالي: $h(s) = \frac{s-a}{b-a}$، $\forall s \in [a,b]$، فسوف ترد الاشارة إلى هذا التكافؤ عدة مرات، فيما يلي:

---

(١) Product

٩,١٢ نظرية. ليكن X فضاء تبولوجيا، ولتكن σ و μ و γ مسارات في X، من x_0 إلى x_1، ومن x_1 إلى x_2، ومن x_2 إلى x_3، على التوالي. حينئذ فإن:

(i) $[\sigma].([\mu].[\gamma]) = ([\sigma][\mu])[\gamma]$

(ii) إذا رمزنا للمسار الثابت $t \to x_i$ $(\forall t \in I)$ بالرمز x_i، $i = 0,1$، فإن

(أ) $[x_0].[\sigma] = [\sigma]$

و (ب) $[\sigma].[x_1] = [\sigma]$.

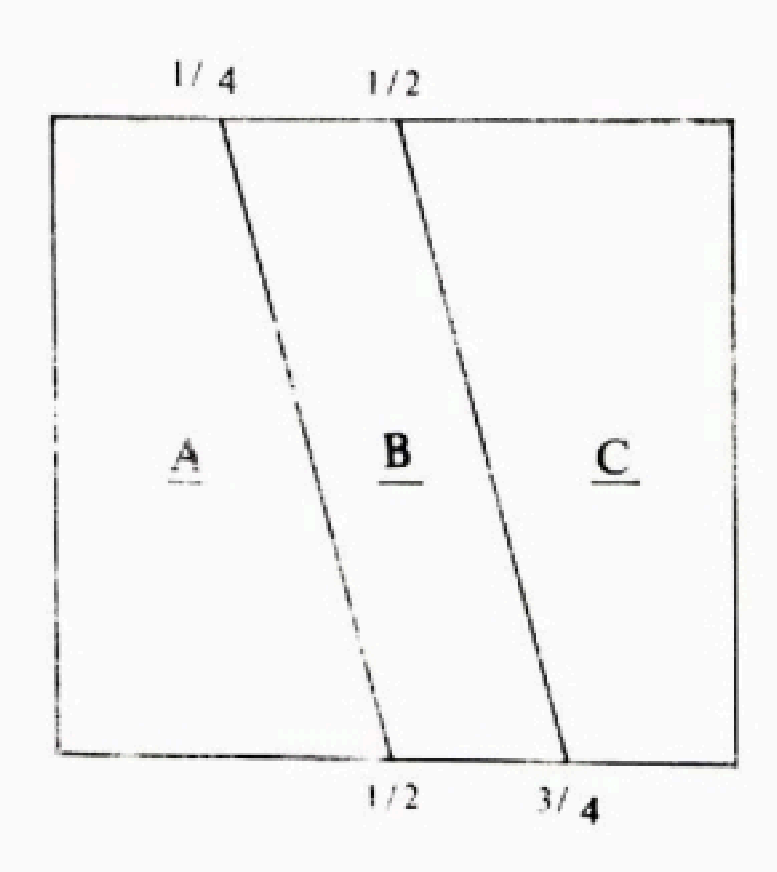
(iii) $[\sigma].[\sigma^{-1}] = [x_0]$

و $[\sigma^{-1}].[\sigma] = [x_1]$

حيث $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1-s)$, $\forall s \in I$.

البرهان

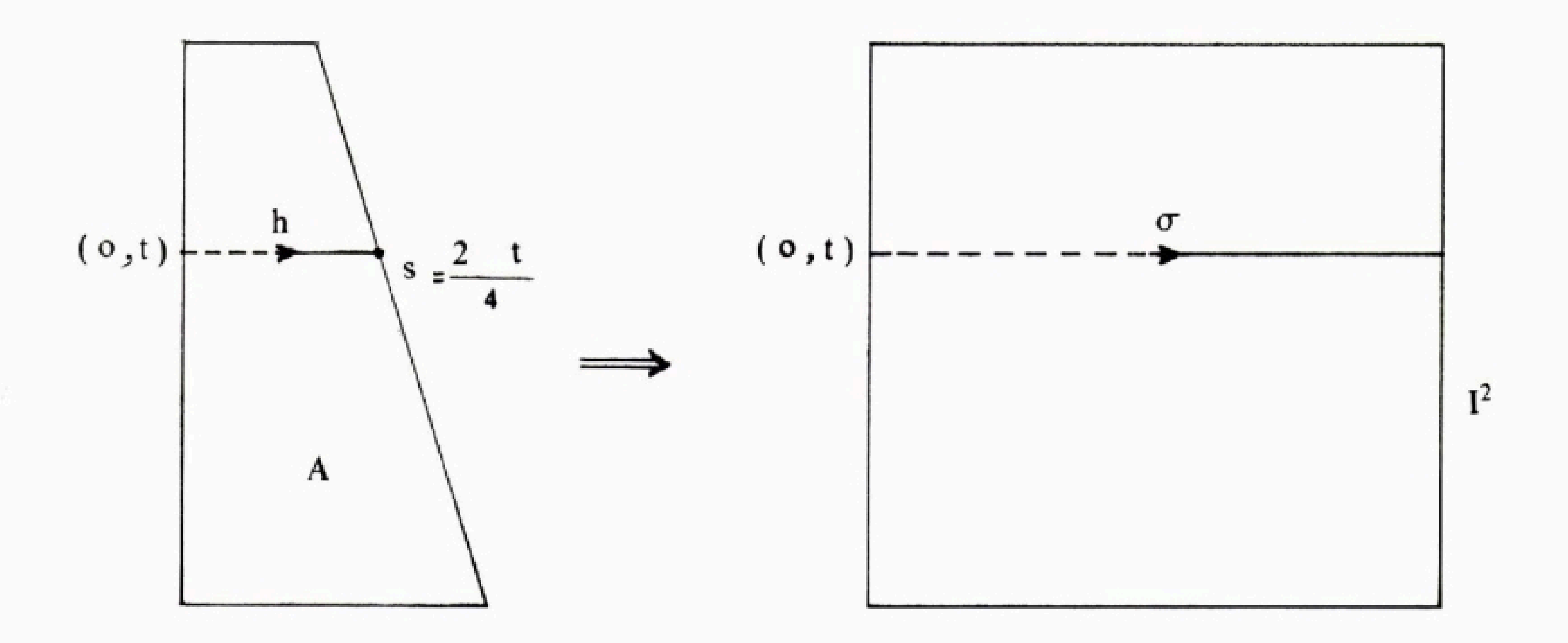
(i) نهدف لتعريف هموتوبيا نسبية F من $(\gamma \cdot \mu) \cdot \sigma$ إلى $\gamma \cdot (\mu \cdot \sigma)$. من أجل ذلك، نقسم I^2 إلى ثلاثة رباعيات $\underline{A}$ و $\underline{B}$ و $\underline{C}$ كما في الشكل ٩,٧ ، ونعرف F على كل واحد منها، على حدة. الآن إذا



الشكل (٩,٧) تقسيم I^2

كانت $(s,t) \in \underline{A}$، فيترتب على ذلك أن $s \in [0, \frac{2-t}{4}]$. إذا طبقنا التكافؤ الطبيعي $h: [0, \frac{2-t}{4}] \to I$، ثم طبقنا المسار $\sigma: I \to X$، نحصل على f_1. من ثم، فإننا نعرف:

$$\underline{A} \ni (s,t) \forall, F(s,t) = \sigma(h(s)) = \sigma\left(\frac{4s}{2-t}\right)$$



الشكل (٩،٨) تعريف F على A

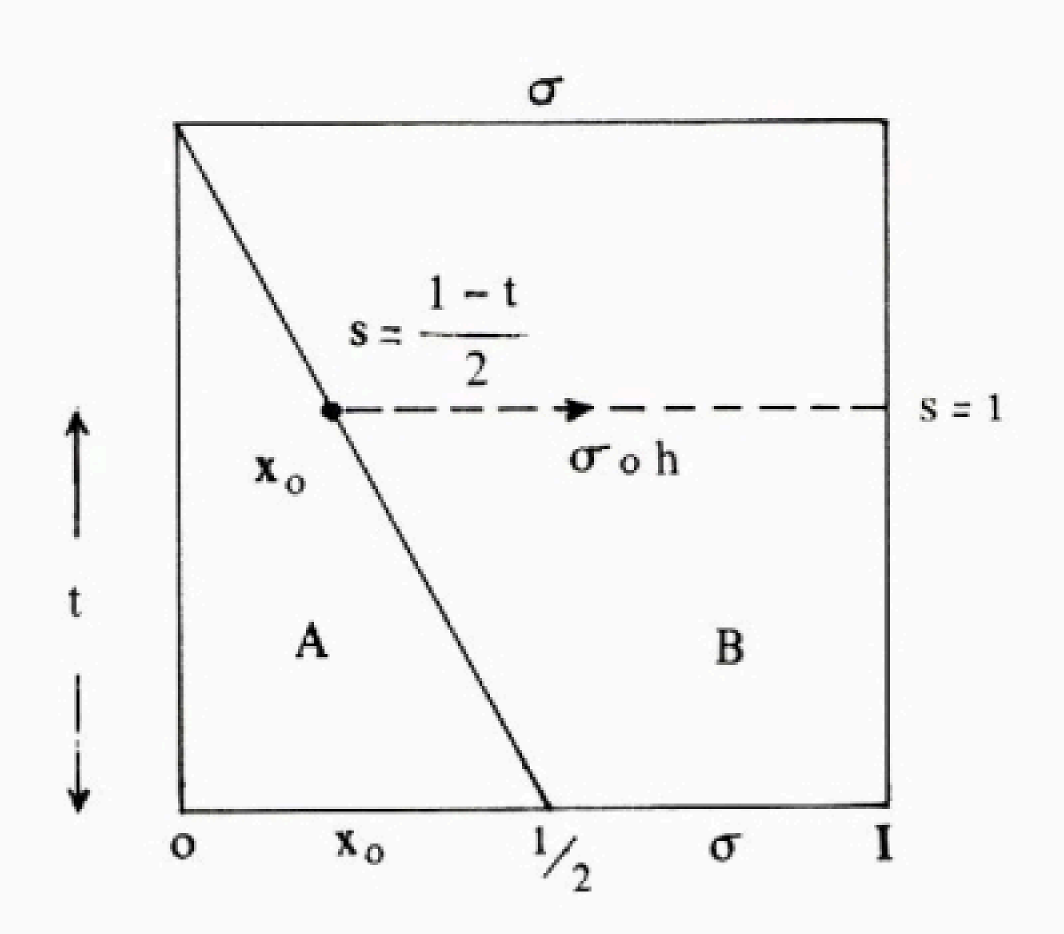
أما بالنسبة لتعريف F على B أو C، فإننا نحول B أو C أولاً إلى شكل المربع I^2 بالطريقة الواضحة، ومن ثم نطبق μ أو γ . إذن – دون إشارة إلى A، B، أو C – فإننا نعرف $F: I^2 \longrightarrow X$ على النحو التالي:

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma\left(\dfrac{4s}{2-t}\right) & , o \leq s \leq \dfrac{2-t}{4} \\ \mu\,(4s+t-2) & , \dfrac{2-t}{4} \leq s \leq \dfrac{3-t}{4} \\ \gamma\left(\dfrac{4s+t-3}{1+t}\right) & , \dfrac{3-t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

استناداً على نظرية الالصاق، فإن F مستمر على I^2. من السهل التأكد من أن F هموتوبيا نسبية من $(\mu . \gamma). \sigma$ إلى $\gamma .(\sigma . \mu)$.

(ii) (أ): $[\sigma] = [\sigma] . [x_o]$: نرمي إلى إنشاء هموتوبيا نسبية من $\sigma . x_o$ إلى σ ، ونحقق ذلك بطريقة شبيهة بطريقة (i). نقسم I^2 إلى المثلث A والرباعي B، كما في الشكل ٩،٩ . نعرف F على A بأنه الراسم الثابت x_o. كي نعرف F على B، نحول B إلى شكل المربع I^2، باستخدام التكافؤ الطبيعي h، على نحو ما سبق، ثم نطبق σ ، فيكون لدينا:

$$B \ni (s,t) \forall \, , F(s,t) = \sigma\left(\frac{2s+t-1}{1+t}\right)$$



الشكل(٩,٠٩) تكافؤ $\sigma .x_o$ مع σ

(ب): $[\sigma].[x_1) = [\sigma]$: يُبيَّن ذلك بنفس الطريقة السابقة.

(iii) $[x_o] = [\sigma^{-1}].[\sigma]$: $\forall t \in I$، نعرف المسار σ_t على النحو التالي: $\sigma_t(s) = \sigma(st)$, $\forall s \in I$.

الآن نعرف $f_t : I \longrightarrow X$ بأنه المسار $f_t = \sigma_t . \sigma_t^{-1}$. من ثم، فإن $F : I \times I \longrightarrow X$ حيث $F(s,t) = f_t(s)$

$\forall (s,t) \in I \times I$ هوموتوبيا نسبية من $\sigma . \sigma^{-1}$ إلى x_o. إذن $[x_o] = [\sigma^{-1}].[\sigma]$.

يترتب على ذلك أن $[x_1] = [\sigma].[\sigma^{-1}]$ لأن $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$. □

إذا كان σ مساراً في X بحيث يبدأ وينتهي في نفس النقطة x_o، فيسمى عروة[1] عند x_o. إذا توقفنا قليلاً عند نظرية ٩,١٢ ، نتبين ما يلي:

٩,١٣ استنتاج. إذا كان لدينا فضاء تبولوجي X، ونقطة $x_o \in X$، حينئذ فإن مجموعة فصول التكافؤ للعرى عند x_o زمرةٌ بالنسبة للعملية الثنائية:

$$[\sigma].[\mu] = [\sigma.\mu].$$

البرهان. يترتب على النظرية السابقة، أن هذه العملية تجميعية، ولها عنصر محايد هو $[x_o]$، وإذا كان $[\sigma]$ هو فصل التكافؤ الذي تمثله العروة σ في X، فإن $[\sigma^{-1}]$ هو معكوس لـ $[\sigma]$. □

---

(١) Loop

تسمى زمرة فصول التكافؤ للعرى عند x_o بالزمرة الأساسية[١] للفضاء بالنسبة لنقطة القاعدة x_o، ويرمز لها بـ $\pi_1(X,x_o)$

مما يجدر ذكره، في هذا الصدد، أن هُرُوزِ[٢] استطاع أن يعمم الأفكار السابقة عام ١٩٣٥ م ليربط بكل فضاء تبولوجي X ونقطة ثابتة فيه x_o، زمرة: $\pi_n(X,x_o)$, n = 2,3,...، تعرف بزمرة الهموتوبيا في البعد n[٣] ([6], [8], [15]). وهروز نفسه هو الذي أدخل مفهوم التكافؤ الهموتوبي، وقد أدت إضافاته هذه إلى طفرة كبيرة في التبولوجيا الجبرية في الثلاثينات.

٣ـ الرواسم المستمرة والزمرة الأساسية

في هذا الشأن، نبين كيف يؤدي الراسم المستمر بطريقة طبيعية، إلى تشاكل بين الزمر الأساسية للنطاق والنطاق المرافق.

تعريف. إذا كان $f : X \to Y$ راسماً مستمراً، و $x_o \in X$، فنعرف الراسم:

$$f_* : \pi_1(X,x_o) \to \pi_1(Y,f(x_o))$$

على النحو التالي: $\pi_1(X,x_o) \ni [\sigma]\ \forall, f_*([\sigma]) = [f o \sigma]$

بالطبع لا بد أن نتحقق من أن تكافؤ σ و σ' يستلزم تكافؤ $fo\sigma$ و $fo\sigma'$. لنفرض إذن أن $F : I \times I \to X$ هموتوبيا نسبية من σ إلى σ'. إذا اعتبرنا التركيب:

$$I \times I \xrightarrow{F} X \xrightarrow{f} Y$$

نجد أنه هموتوبيا نسبية من $fo\sigma$ إلى $fo\sigma'$.

دلالة. فيما يلي، سوف نستخدم الرمز:

$$f : (X,x_o) \to (Y,y_o)$$

للدلالة على أن f راسم من الفضاء X إلى الفضاء Y، وأن $f(x_o) = y_o$.

٩,١٤ نظرية

(i) إذا كان $f : (X,x_o) \to (Y,y_o)$ راسماً مستمراً، حينئذ فإن $f_* : \pi_1(X,x_o) \to \pi_1(Y,y_o)$ تشاكل.

(ii) إذا كان $f : (X,x_o) \to (Y,y_o)$، و $g : (Y,y_o) \to (Z,z_o)$ راسمين مستمرين، حينئذ فإن $(gof)_* = g_* o f_*$.

---

(١) The fundamental group (٢) Hurewicz (٣) the nth homotopy group

(iii) إذا كان $id:(X,x_0)\longrightarrow(X,x_0)$ راسم المتطابقة، فحينئذ id_* يساوي تشاكل المتطابقة لـ $\pi_1(X,x_0)$

البرهان. (i) إذا كان $[\sigma]$ و $[\mu]$ ∋ $\pi_1(X,x_0)$, حينئذ:

$$\begin{aligned} f_*([\sigma].[\mu]) &= f_*([\sigma.\mu]) \\ &= [fo(\sigma.\mu)] \\ &= [(fo\sigma).(fo\mu)] \\ &= f_*([\sigma]).f_*([\mu]) \end{aligned}$$

إذن f_* تشاكل.

(ii) و (iii): البرهان في هذه الحالة مباشر من تعريف f_*. □

يترتب على النظرية السابقة أن التكافؤ التبولوجي يؤدي إلى تشاكل تقابلي بين الزمر الأساسية. الآن نسعى لأن نبين أن كل تكافؤ هموتوبي f يؤدي إلى تشاكل تقابلي f_*، وهذا ما يقودنا لبحث مدى تبعية الزمرة الأساسية على نقطة القاعدة x_0.

تعريف. ليكن X فضاء تبولوجيا، و α مساراً في X من x_0 إلى x_1. نعرف: $\alpha_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_1)$ كما يلي:

$$\alpha_*([\sigma]) = [\alpha^{-1}.\sigma.\alpha]$$

$\forall[\sigma]\ni\pi_1(X,x_0)$

٩,١٥ نظرية. إذا كان α مساراً في الفضاء X من x_0 إلى x_1، حينئذ يكون $\alpha_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_1)$ تشاكلاً تقابلياً.

البرهان. $\forall$ $[\sigma]$ و $[\mu]$ ∋ $\pi_1(X,x_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha_*([\sigma].[\mu]) &= \alpha_*([\sigma.\mu]) \\ &= [\alpha^{-1}].[\sigma].[\mu].[\alpha] \\ &= ([\alpha^{-1}][\sigma].[\alpha])([\alpha^{-1}][\mu].[\alpha]) \\ &= \alpha_*([\sigma]).\alpha_*([\mu]) \end{aligned}$$

إذن α_* تشاكل.

نعتبر الآن $(\alpha^{-1})_*:\pi_1(X,x_1)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$. بما أن: $\alpha_* o(\alpha^{-1})_* = id$ و $(\alpha^{-1})_* o\,\alpha_* = id$،

إذن α_* تشاكل تقابلي. □

٩,١٦ استنتاج: إذا كان X فضاء تبولوجيا متصلاً بالمسارات، حينئذ فإن $\pi_1(X,x_0)$ متشاكلة تقابلياً مع $\pi_1(X,x_1)$، $\forall x_0, x_1 \in X$.

٩,١٧ نظرية. ليكن $f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow Y$ من خلال هموتوبيا F. لتكن x_0 نقطة في X، و $\alpha : I \longrightarrow Y$ المسار: $\alpha(t) = F(x_0,t)$، $\forall t \in I$. حينئذ يتبادل الشكل التالي:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_{0*}} & \pi_1(Y,f_0(x_0)) \\ & {\scriptstyle f_{1*}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \alpha_*} & \\ & \pi_1(Y,f_1(x_0)) & \end{array}$$

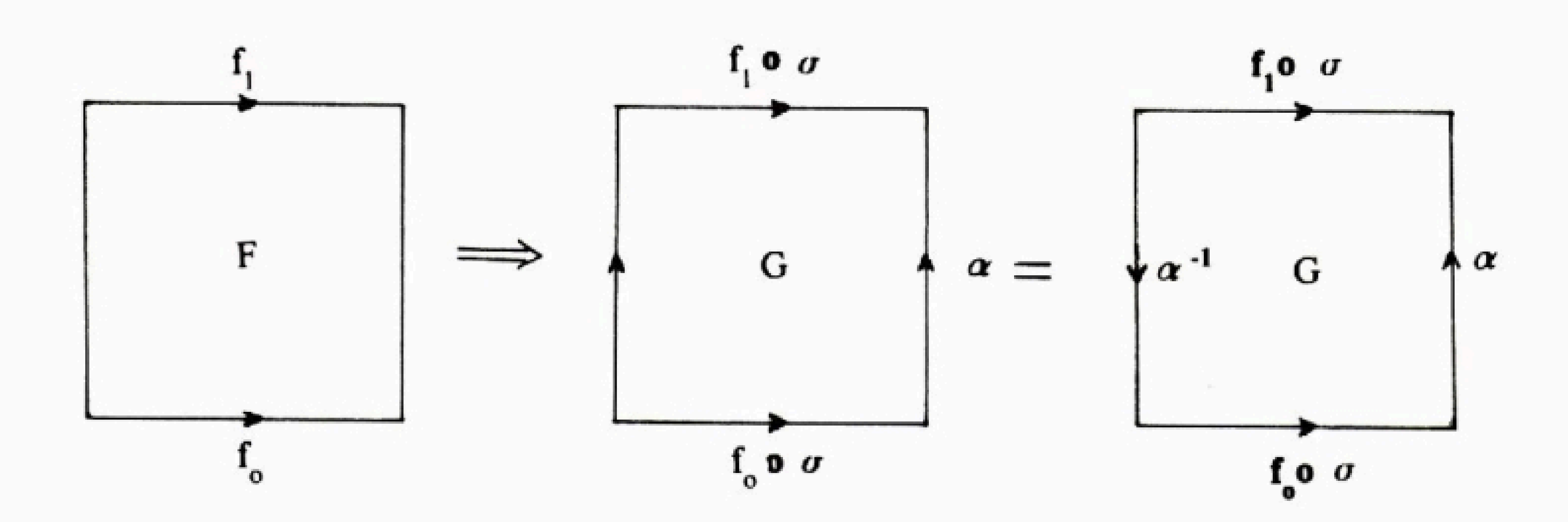
البرهان. إذا كان $[\sigma] \in \pi_1(X,x_0)$، فثمة هموتوبيا

$$G : I \times I \longrightarrow Y$$

من $f_0 o \sigma$ إلى $f_1 o \sigma$، معرفة على النحو التالي:

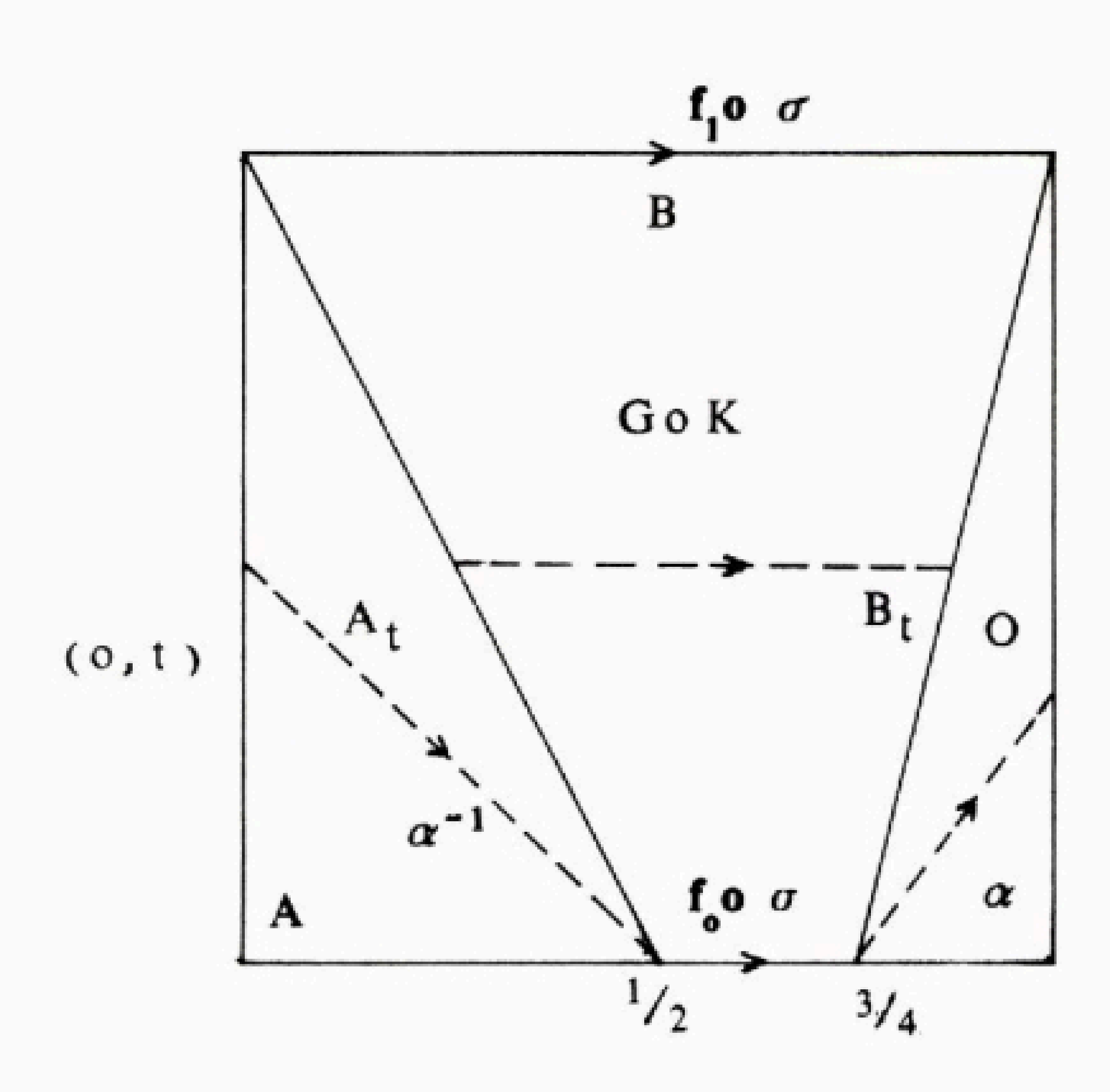
$$G(s,t) = F(\sigma(s),t), \forall (s,t) \in I \times I.$$

نلاحظ أن $G(0,t) = \alpha(t)$، و $G(1,t) = \alpha(t)$، $\forall t \in I$.



الشكل (٩,١٠) الهموتوبيا G

الآن ننشيء هموتوبيا نسبية H من $(\alpha.(f_0 o \sigma)).\alpha^{-1}$ إلى $f_1 o \sigma$ بتقسيم I^2 إلى مثلثين ورباعي، وتعريف H على كل واحد منها على حدة كما هو موضح في الشكل ٩,١١.



الشكل (٩,١١) الهموتوبيا H

فعلى جزء المستقيم A_t من (o,t) إلى $(\frac{1}{2},o)$ في المثلث A، نعرف H بأنه تركيب التكافؤ التبولوجي الطبيعي $I \longrightarrow A_t$، مع $\alpha^{-1}: I \longrightarrow Y$, $\forall t \ni I$ (انظر الشكل ٩,١١). أما بالنسبة للرباعي، B، فإن H هو التركيب $Y \xrightarrow{G} I^2 \xrightarrow{K} B$ حيث $K|B_t$ هو التكافؤ الطبيعي إلى $I \times \{t\}$ (انظر الشكل ٩,١١). أخيراً، فإننا نعرف H على D بطريقة تعريف H على A، وحسب ما هو موضح بالشكل.

بما أن $\alpha\ .\ \alpha^{-1}.f_o o\ \sigma$ مكافيء لـ $f_1 o\ \sigma$, $\forall [\sigma] \ni \pi_1(X,x_o)$، إذن $f_{1*} = \alpha_* of_{o*}$. □

٩,١٨ استنتاج. ليكن X و Y فضاءين متصلين بالمسارات، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تكافؤا هموتوبيا. حينئذ فإن:

$$f_* : \pi_1(X, x_o) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_o))$$

تشاكل تقابلي، $\forall x_o \ni X$.

البرهان: ليكن $g: Y \longrightarrow X$ معكوساً هموتوبيا لـ f. لنعتبر حالتين:

الحالة الأولى: $x_o = g(y_o)$ لنقطة ما $y_o \ni Y$. بما أن $gof \simeq Id_X$ فيترتب على النظريات ٩,١٤ و ٩,١٥ و ٩,١٧ أن التركيب:

$$\pi_1(X,x_o) \xrightarrow[f_*]{} \pi_1(Y,f(x_o)) \xrightarrow[g_*]{} \pi_1(X,g(f(x_o)))$$

تشاكل تقابلي مما يترتب عليه أن f_* آحادي. بنفس الحجة، فإن التركيب:

$$\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(x_0))$$

تشاكل تقابلي ومن ثم، فإن f_* راسم غامر. إذن f_* تشاكل تقابلي.

الحالة الثانية: x_0 لا تقع في $g(Y)$. نختار $x_1 \in g(Y)$، ومساراً α من x_0 إلى x_1. إذن يكون لدينا الشكل الإبدالي التالي:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,f(x_0)) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow (f\circ\alpha)_* \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,f(x_1)) \end{array}$$

استناداً على نظرية ٩,١٥، فإن كلا من α_* و $(f\circ\alpha)_*$ تشاكل تقابلي واستناداً على الحالة الأولى، من هذا البرهان، فإن:

$$f_* : \pi_1(X,x_1) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x_1))$$

تشاكل تقابلي. من ثم، فإن:

$$f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x_0))$$

تشاكل تقابلي أيضاً. □

نختم هذا الجزء ببحث العلاقة بين الزمر الأساسية لفضاء الجداء، والفضاءات التي أنشيء منها:

٩,١٩ نظرية. إذا كان لدينا فضاءان تبولوجيان X و Y، وإذا كان p_1 و p_2 الاسقاطين الطبيعيين من فضاء الجداء $X \times Y$ إلى X و Y على التوالي، حينئذ فإن الراسم:

$$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$$

حيث $\phi([\sigma]) = (p_{1*}([\sigma]), p_{2*}([\sigma]))$ $\forall\ [\sigma] \in \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$ $\forall\ x_0 \in X$,

و $\forall\ y_0 \in Y$

يكون تشاكلاً تقابلياً،

البرهان: من الجلي أن ϕ تشاكل.

من ناحية أخرى، فإن الراسم:

$$\psi : \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0) \longrightarrow \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$$

الـــذي يرسل ([τ] و [μ]) إلى فصـــل التكافؤ الـــذي تمثلــه العروة $(\mu(t), \tau(t)) \longrightarrow t$, $\forall t \ni I$، يشكل معكوساً لـ ϕ .

من ثم، فإن ϕ تشاكل تقابلي. □

٤ . الزمرة الأساسية لـ S^n.

أ . حساب $\pi_1(S^1,1)$.

كما نعلم، فإن $S^1 = \{z : z = e^{i\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ زمرة بالنسبة لعملية الضرب المعتادة للأعداد المركبة. علاوة على ذلك، فالراسم:

$$p : R \rightarrow S^1$$

حيث $p(r) = e^{i2\pi r}, \forall r \ni R$

ليس راسماً مستمراً فحسب، بل هو أيضاً تشاكل زمر (بالنسبة لعملية الجمع المعتادة على R)، و$\mathrm{Ker}\, p = Z$.

الآن إذا قصرنا p على $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ فيكون لدينا تكافؤ تبولوجي:

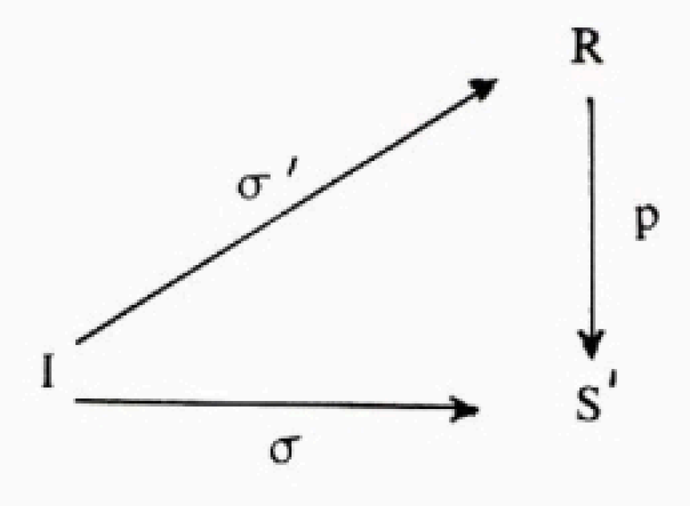
$$p : (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \longrightarrow S^1 - \{-1\}$$

ومعكوسه $a : S^1 - \{-1\} \rightarrow (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ معرفٌ على النحو التالي:

$a(z) = \frac{1}{2\pi} \times$ زاوية z (زاوية $z \ni (-\pi,\pi)$).

باستخدام خواص الفضاءين R وS^1، والراسم p، سوف نبين أن $\pi_1(S^1,1)$ وZ متشاكلتان تقابلياً.

٩,٢٠ نظرية (نظرية المسار الغطائي الفريد)(١). ليكن σ مساراً في S^1 يبدأ عند $z=1$. حينئذ يوجد مسار فريد σ' في R بحيث أن $\sigma'(0) = 0$، و σ' يغطي σ : أي أن $\sigma = p\circ\sigma'$.



---

(١) The unique covering path theorem

البرهان: يترتب على تراص الفضاء I أن $\sigma : I \to S^1$ مستمر بانتظام (استنتاج ٦,١٢). من ثم، فليكن k أصغر عدد طبيعي بحيث أن $k > 1$، وكلما كانت s و $s^1 \in I$ و $|s - s^1| < \frac{1}{k-1}$ فحينئذ $|\sigma(s) - \sigma(s^1)| < 1$.

نعتبر الآن $t \in I$، ولنضع $z_j = \sigma(\frac{k-j}{k}.t)$، $j \in \{O, 1, ..., k\}$. حينئذ فإن $|z_j - z_{j+1}| < 1$ لأن $t/k < \frac{1}{k-1}$. إذن $\frac{z_j}{z_{J+1}} \neq -1$، $O \leq j \leq k-1$. علاوة على ذلك، فإن:

$$\sigma(t) = z_1/z_2 \cdot z_1/z_2 \ldots z_{k-1}/z_k$$

من ثم، فإننا نعرف $\sigma : I \to R$ على النحو التالي:

$$\sigma'(t) = a(z_o/z_1) + a(z_1/z_2) + \ldots + a(z_{k-1}/z_k)$$

من الواضح أن σ راسم مستمر بحيث أن $\sigma = \sigma'$ po، و $\sigma'(O) = O$.

لنفرض الآن أن σ'' مسار آخر في R يبتدىء عند O، ويغطي σ. إذن $p(\sigma''(t)) = p(\sigma(t))$، $\forall t \in I$، مما يترتب عليه أن $p(\sigma'(t) - \sigma''(t)) = 1$، $\forall t \in I$. إذن $\sigma'' - \sigma'$ راسم مستمر من I إلى $Z = \text{Ker } p$. بما أن I فضاء متصل، و Z فضاء متقطع، فإن $\sigma'' - \sigma'$ راسم ثابت (نظرية ٤,٥). من ثم، فإن $0 = \sigma''(0) - \sigma'(0) = \sigma''(t) - \sigma'(t)$، $\forall t \in I$، مما يترتب عليه أن $\sigma'' = \sigma'$. إذن هنالك مسار فريد من R بحيث يبتدىء عند $0 \in R$، ويغطي σ.□

٩,٢١ نظرية (نظرية الهوموتوبيا الغطائية الفريدة[١]). ليكن $\sigma_1, \sigma_2 : I \to S^1$ مسارين متكافئين بحيث أن $\sigma_1(o) = \sigma_2(o) = 1$. ليكن $\sigma'_i : I \to R$ المسار الغطائي الفريد لـ σ_i بحيث أن $\sigma'_i(O) = O$، $i = 1, 2$. لتكن $F : I \times I \to S^1$ هموتوبيا نسبية من σ_1 إلى σ_2. حينئذ هنالك هموتوبيا نسبية فريدة $F : I \times I \to R$ من σ'_1 إلى σ'_2 بحيث أن F يغطي F.

بصفة خاصة، إذا كانت σ_1 و σ_2 عروتين في S^1، فحينئذ يكون $\sigma'_1(1) = \sigma'_2(1)$ عدداً صحيحاً (يسمى درجة σ_1 [٢]).

---

(١) The unique covering homotopy theorem

(٢) The degree of

البرهان: إذا استبدلنا I بـ I × I، و σ بـ F في برهان النظرية السابقة، فإنه يتسنى لنا إنشاء F بنفس طريقة إنشاء σ ، وإثبات أنه راسم فريد.

يبقى علينا أن نبين أن مقصور ´F على كل من I × 0 و I × 1 راسم ثابت. الآن $p(F'(0,t)) = 1 = F(0,t)$، ومن ثم، فإن $F'(0 \times I)$ محتواة في Z. نظراً لاتصال 0×I، فإن مقصور ´F على I × 0 راسم ثابت. بطريقة مشابهة فإن مقصور ´F على I × 1 راسم ثابت. إذن ´F هموتوبيا نسبية من σ'_1 إلى σ'_2 .
إذا افترضنا أن σ_1 عروة عند 1، حينئذ فإن $F'(1 \times I)$ محتواة في Z، ومن ثم فإن $\sigma'_1(1) \in Z$ □

باستخدام هاتين النظريتين، يصبح بمقدورنا تعريف تشاكل بين الزمرة الأساسية لـ S^1 وزمرة الأعداد الصحيحة.

تعريف: يعرف الراسم:

$$\deg : \pi_1 (S^1 ,1) \longrightarrow Z$$

على النحو التالي: إذا كان $[\sigma] \in \pi_1(S^1,1)$ ، حينئذ فإن: $\deg([\sigma])$ = درجة σ .

٩,٢٢ نظرية: الراسم $\deg : \pi_1(S^1,1) \to Z$ تشاكل تقابلي.

البرهان

(i) deg تشاكل: لنفرض أن $[\sigma]$ و $[\mu] \in \pi_1(S^1,1)$ ليكن $\sigma', \mu' : I \to R$ المسارين الفريدين، اللذين يبدآن في 0، ويغطيان σ و μ . ليكن $m = \sigma'(1)$، و $n = \mu'(1)$. نعرف $\mu^* : I \to R$ على النحو التالي:

$\mu^*(s) = \mu'(s) + m$ ، $\forall s \in I$. حينئذ فإن $\sigma'.\mu^*(0) = 0$ و $po(\sigma'.\mu^*) = \sigma . \mu$ ، مما يترتب عليه أن $\sigma'.\mu^*$ المسار الفريد الذي يبدأ عند O في R ويغطي $\sigma . \mu$. إذن درجة $\sigma . \mu = \mu^*(1) = m + n$ أي أن:

$$\deg([\sigma].[\mu]) = \deg([\sigma]) + \deg([\mu])$$

(ii) deg راسم آحادي: لنفرض أن $[\sigma] \in \pi_1(S^1,1)$ و $\deg([\sigma]) = O$. إذن المسار الغطائي الفريد ´σ عروة عند $O \in R$. بما أن R فضاء قابل للانكماش، فإن ´σ مكافئة للعروة الثابتة O. يترتب على ذلك أن $po\ \sigma' = \sigma$ مكافئة للعروة الثابتة $p(O) = 1$، في S^1. إذن deg راسم آحادي.

(iii) deg راسم غامر: إذا كانت $\sigma_0 : I \to S^1$ العروة $\sigma_0(s) = e^{i2\pi s}$, $\forall s \in I$، فحينئذ يكون σ'_0 راسم التضمين من I إلى R. إذن $\deg([\sigma_0]) = 1$

استناداً على (i) ، فإن $\deg([\sigma_0]^m) = m$ ، $\forall m \in Z$. من ثم فإن deg راسم غامر.

يترتب على (i) و (ii) و (iii) أن deg تشاكل تقابلي. □

كنا قد ألمحنا في الجزء الثاني من هذا الباب لزمر الهموتوبيا $\pi_n(X,x_0)$. مما يجدر ذكره، أنه بالامكان تعميم الأفكار المتقدمة، وإنشاء تشاكل تقابلي:

$$deg : \pi_n(S^n,1) \rightarrow Z$$

(أنظر [7], [8], [15].)

من جهة أخرى، فإن نظريتي المسار الغطائي الفريد، والهوموتوبيا الغطائية صحيحتان لأي فضاء غطائي(١) $p : E \rightarrow X$ (أنظر [6]).

(ب) حساب $\pi_1(S^n,1)$ ، $2 \leq n$:
سوف نبين، فيما يلي، أن الزمرة الأساسية لـ S^n ، $2 \leq n$ ، هي الزمرة التافهة.

تعريف: يقال إن الفضاء التبولوجي X **متصل ببساطة**(٢) إذا كان X متصلا بالمسارات، وكانت $\pi_1(X,x_0)$ الزمرة التافهة، $\forall\ x_0 \in X$.

٩,٢٣ نظرية: إذا كان X فضاء تبولوجياً، وكان له غطاء مفتوح $\{U,V\}$ بحيث أن كلا من U و V متصل ببساطة، و $U \cap V$ متصل بالمسارات، حينئذ يكون X متصلا ببساطة.

البرهان: يترتب على نظرية ٤,١٣ أن X متصل بالمسارات، ولذا فيكفي أن نثبت أن $\pi_1(X,x_0)$ هي الزمرة التافهة، لنقطة ما $x_0 \in X$. نختار $x_0 \in U \cap V$. لنفرض أن $[\sigma] \in \pi_1(X,x_0)$. استناداً على تمهيد الغطاء للبيق، فإنه يوجد تجزيء للفترة I:

$$O = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$$

بحيث أن:

(i) $\sigma([t_{i-1},t_i])$ محتواة في U أو V ، $1 \leq i \leq n$.

(ii) $\sigma([t_{i-1},t_{i+1}])$ غير محتواة في U أو V لأي i بحيث أن $1 \leq i \leq n-1$.

نعرف الآن المسار σ_i في X بأنه التركيب:

$$I \xrightarrow{k} [t_{i-1},t_i] \xrightarrow{\sigma} X$$

---

(١) Covering space

(٢) Simply connected

حيث k التكافؤ الطبيعي. باتباع طريقة برهان نظرية ٩,١٢ ، فبالامكان أن يُبيَّن أن:

$$\sigma \sim \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

نمضي الآن لاختيار مسار $\mu_i : I \to U \cap V$ بحيث يبدأ في $\sigma(t_i)$ وينتهي في x_0، $1 \leq i \leq n-1$. نعرف، بعدئذ، العرى التالية:

$$\gamma_1 = \sigma_1 \cdot \mu_1$$

$$\gamma_2 = \mu_1^{-1} \sigma_2 \cdot \mu_2$$

.

.

.

$$\gamma_n = \mu_{n-1}^{-1} \cdot \sigma_n$$

استناداً على نظرية ٩,١٢ ، فإن:

$$[\sigma] = [\gamma_1] . [\gamma_2] \ldots . [\gamma_n].$$

في ضوء (i)، فإن γ_i عروة في فضاء متصل ببساطة، $1 \leq i \leq n$، ومن ثم، فإن $[\sigma] = [x_0]$، أي أن $\pi_1(X, x_0)$ هي الزمرة التافهة. □

٩,٢٤ استنتاج: S^n، $n \geq 2$، فضاء متصل ببساطة.

البرهان: لتكن $a = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$، $n \geq 2$. لتكن $U = S^n - \{a\}$ و $V = S^n - \{-a\}$. حينئذ فإن U و V يشكلان غطاء لـ S^n يحقق فرضية نظرية ٩,٢٣، وإذن S^n، $n \geq 2$، فضاء متصل ببساطة. □

ملاحظات:

(i) جدير بنا الإشارة إلى أن نظرية ٩,٢٣ حالة خاصة جداً من نظرية سايفرت - فان كامبن[١] الشهيرة (٣١ - ١٩٣٣م)، والتي تعد من الأدوات الهامة في حساب الزمرة الأساسية (أنظر [١١]).

(ii) لقد ثبت أن كل سطح متراص ومتصل ببساطة مكافىء تبولوجيا للكرة S^2 ([١١])، والسطح هو الفضاء الهاوسدورف الذي يتمتع محلياً بنفس خواص الفضاء الاقليدي R^2. وانطلاقاً من هذه النقطة، وضع بوانكاريه عام ١٩٠٤ التخمين[٢] الشهير التالي، والذي ما يزال مستعصياً على الحل:

---

(١) Seifert-Van-Kampen

(٢) Conjecture

إذا كان M فضاء هاوسدورف بحيث أن لكل نقطة في M جواراً مفتوحاً مكافئاً تبولوجيا لـ R^3، وإذا كان M متراصاً ومتصلا ببساطة، حينئذ فإن M فكافىء تبولوجياً للكرة S^3.

من الواضح أن هذا التخمين مرتبط بمسألة تصنيف الفضاءات التي تتمتع محلياً بنفس خواص الفضاء الاقليدي R^3، والتي هي الأخرى مسألة مفتوحة.

٥ . تطبيقات:

أولا: نبرهن نظرية النقطة الثابتة لبراور في البعد 2 عبر النظرية التالية:

٩,٢٥ نظرية: ليس بالإمكان تمديد راسم المتطابقة: $id : S^1 \to S^1$ لراسم مستمر على D^2.

البرهان: لنفرض جدلا وجود راسم مستمر:

$$r : D^2 \to S^1$$

يكون ممدداً لراسم المتطابقة id_{S^1}. ليكن:

$$j : S^1 \to D^2$$

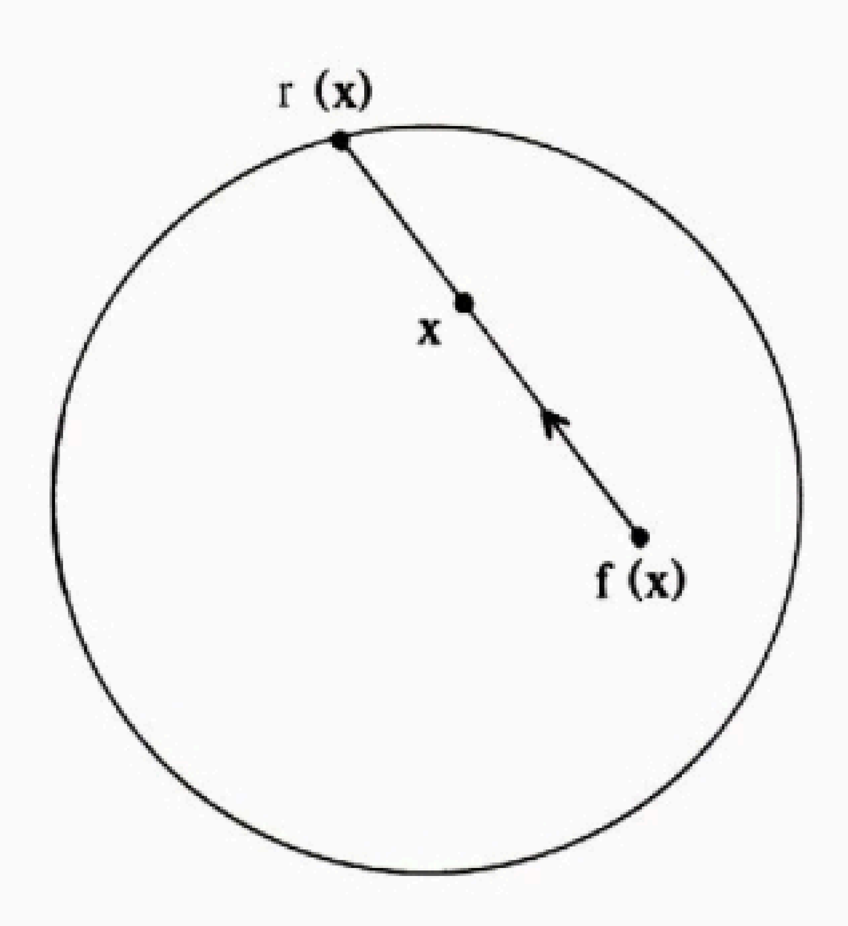
راسم التضمين. حينئذ فإن $roj = id_{S^1}$. استناداً على نظرية ٩,١٤ ، فإن التركيب:

$$\pi_1 (S^1 ,1) \xrightarrow{j_\circ} \pi_1 (D^2 ,1) \xrightarrow{r_\circ} \pi_1 (S^1 ,1)$$

يساوي راسم المتطابقة لـ $\pi_1 (S^1 ,1)$ ، مما يترتب عليه أن $j_\circ$ راسم آحادي. لكن $\pi_1 (S^1,1) \simeq Z$ ، في حين أن $\pi_1 (D^2 ,1) = \{1\}$. حيال هذا التناقض، نستنتج أن id_{S^1} غير قابل للتمديد على D^2. □

٩,٢٦ نظرية. (نظرية النقطة الثابتة لبراور في البعد 2).

إذا كان $f : D^2 \to D^2$ راسماً مستمراً، فإن له نقطة ثابتة.



الشكل ٩,١٢ : إثبات نظرية براور

البرهان: نفترض جدلا أنه لا توجد نقطة ثابتة لـ f. حينئذ يمكننا إنشاء راسم مستمر:

$$r : D^2 \to S^1$$

على النحو التالي: إذا كانت $x \in D^2$، فنعرف $r(x) \in S^1$ بأنها تقاطع S^1 مع امتداد جزء المستقيم الذي يمر بالنقطتين $f(x)$ و x، في الاتجاه $f(x) \to x$ (أنظر الشكل ٩,١٢). من ثم، يكون لدينا ممدد مستمر لراسم المتطابقة $id : S^1 \to S^1$، مما يتناقض مع النظرية السابقة. إذن ثمة نقطة ثابتة لـ f. □

ثانياً: نهدف لبرهان نظرية بورسك - الم في البعد 2.

لنلاحظ في البداية، أنه نظراً إلى أن الزمرة الأساسية لـ S^1 زمرة دورية لا نهائية، فكل تشاكل $X : \pi_1 (S^1,1) \to \pi_1 (S^1 ,x_0)$ إما أن يكون:

(i) **التشاكل التافه**: وفي هذه الحالة، تكون $X([\sigma_0])=[x_0]$ حيث $[\sigma_0]$ هو العنصر المولد لـ $\pi_1 (S^1,1)$,

أو (ii) يكون أحادياً: وفي هذه الحالة، تكون $X([\sigma_0]) \neq [x_0]$.

فيما يلي، ليكن $u : S^1 \to S^1$ الراسم $u(z) = z^2$, $\forall z \in S^1$.

٩,٢٧ تمهيد:

(أ) $u_* : \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1 ,1)$ تشاكل آحادي.

(ب) إذا كان $\tau : I \to S^1$ مساراً بحيث أن $\tau(1) = -\tau(O)$ فحينئذ تكون العروة $u \circ \tau$ غير مكافئة للعروة الثابتة.

البرهان:

(أ) لتكن $\sigma_0 : I \to S^1$ العروة $\sigma_0(s) = e^{i 2\pi s}$، $\forall s \in I$. من ثم، فإن $u_* ([\sigma_0])$ هو فصل التكافؤ الذي تمثله العروة $u \circ \sigma_0(s) = e^{i4\pi s}$، $\forall s \in I$. يتضح من ذلك، أن درجة $u_* ([\sigma_0])$ تساوي 2، ولذا فإن $u_* ([\sigma_0]) \neq [1]$. إذن u_* تشاكل آحادي.

(ب) يمكننا، بالتناظر، أن نفترض أن $\tau(o) = 1 \in S^1$ و $\tau(1) = -1 \in S^1$. ليكن $\tau' : I \to R$ المسار الوحيد الذي يبدأ عند 0 ويغطي τ . بما أن $\tau(1) = -1$، إذن $\tau(1) \neq 0$. الآن، $\forall s \in I$، فإن:

$$u \circ \tau (s)=(\tau (s))^2$$

$$= p(2 . \tau'(s))$$

حيث $p : R \to S^1$ الراسم الغطائي. من ثم، فإن $2\tau'$ هو المسار الوحيد الذي يبدأ عند 0 ويغطي $u \circ \tau$. إذن درجة $u \circ \tau$ لا تساوي 0، مما يترتب عليه أن $u \circ \tau$ غير مكافئة للعروة الثابتة.

تعريف. إذا كان لدينا راسم $f : S^n \to S^m$ ، $m, n \in N$ ، فيقال إن f راسم **قطري**[١] شريطة أن تكون $f(-x) = -f(x)$ ، $\forall x \in S^n$.

الراسم القطري إذن هو الذي يرسل كل نهايتي قطر في S^n إلى نهايتي قطر في S^m.

٩,٢٨ **نظريــــة**. ليكن $f : S^1 \to S^1$ راسماً قطريـــاً مستمراً. حينئـــذ يكون $f_* : \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, f(1))$ تشاكلاً أحادياً.

البرهان. نعرف $q : S^1 \to S^1$ بأنه الراسم الذي يرسل $z \in S^1$ إلى $e^{i\theta/2}$ حيث θ العدد الوحيد الذي يستوفي الشرط: $z = e^{i\theta}$ ، و$0 \le \theta < 2\pi$. من ثم، نعرف $\bar{f} : S^1 \to S^1$ على النحو التالي: $\bar{f}(z) = (f(q(z)))^2$ ، $\forall z \in S^1$. من الجلي، أن q، ومن ثم $\bar{f}$، مستمر على $S^1 - \{1\}$. بما أن f راسم قطري، فيترتب على ذلك، وعلى تعريف $\bar{f}$، أن $\bar{f}$ مستمر أيضاً عند 1. إذا اعتبرنا الآن $\bar{f}_* : \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, \bar{f}(1))$ ، فنجد أنه يرسل $[\sigma_0]$، العنصر المُولِّد لـ $\pi_1(S^1,1)$ ، إلى فصل التكافؤ الذي تمثله العروة $\delta : I \to S^1$ حيث:

$$\delta(s) = (f(e^{i\pi s}))^2 = u(f(e^{i\pi s})), \quad \forall s \in I.$$

نظراً لقطرية f، واستناداً على تمهيد ٩,٢٧ (ب)، فإن $[\delta]$ لا تساوي $[\bar{f}(1)]$، ومن ثم، فإن $\bar{f}_*$ راسم آحادي. في ضوء الشكل الإبدالي:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ S^1 & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \end{array}$$

وتمهيد ٩,٢٧ (أ)، فإن $f_* : \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1, f(1))$ تشاكل أحادي. □

٩,٢٩ **استنتاج**. لا يوجد راسم قطري مستمر من S^2 إلى S^1.

البرهان. لنفرض جدلاً أن هنالك راسم قطري مستمر $f : S^2 \to S^1$ ليكن $j : S^1 \to S^2$ راسم التضمين إذن $foj : S^1 \to S^1$ راسم قطري مستمر، مما يترتب عليه أن التركيب:

$$\pi_1(S^1,1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(S^2,1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1))$$

تشاكل آحادي (نظرية ٩,٢٨). بيد أن الزمرة $\pi_1(S^1,1)$ غير تافهة، و$\pi_1(S^2,1)$ هي الزمرة التافهة. إذن افتراضنا وجود راسم قطري مستمر من S^2 إلى S^1 يؤدي إلى تناقض، ولذا فإنه لا يوجد. □

---

(١) Antipodal mapping

٩,٣٠ نظرية (نظرية بورسك - الم في البعد 2). إذا كان $f : S^2 \longrightarrow R^2$ راسماً مستمراً، فهنالك $x \ni S^2$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$.

البرهان. لنفرض جدلاً أنه لا توجد $x \ni S^2$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$. من ثم، فإن:

$$g : S^2 \longrightarrow S^1$$

$$S^2 \ni x \,\forall, g(x) = \frac{1}{|f(x)-f(-x)|}(f(x) - f(-x))$$

راسم قطري مستمر، مما يتناقض مع الاستنتاج السابق. إذن ثمة $x \ni S^2$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$. □

من التطبيقات الهامة أيضاً لمفهوم الدرجة، برهان النظرية الأساسية في الجبر: إذا كانت $p(z)$ كثيرة حدود غير ثابتة في حقل الأعداد المركبة C، حينئذ يكون لـ $p(z)$ جذر واحد على الأقل (انظر [16] ص 70).

وجدير بالذكر أنه تتوفر لهذه النظرية براهين جبرية، وتستنتج أيضاً من نظرية ليوفيل[١] في التحليل المركب.

---

(١) Liouville

تمارين (٩)

الجزء الأول

١ ــ بين أن الفضاءين X وY متكافئان هموتوبيا في كل مما يأتي:

(أ) X = الأسطوانة الدائرية، و$Y = S^1$

(ب) $X = \mathbf{R}^n - \{0\}$، $Y = S^{n-1}$

(جـ) X = المخروط، و$Y = \{0\}$

٢ ــ ليكن X فضاء منتهياً وهاوسدورف. بين أن X قابل للانكماش إذا وإذا فقط كان X فضاء النقطة الواحدة.

٣ ــ ليكن X فضاء تبولوجيا، وY فضاء تبولوجيا قابلاً للانكماش. بين أنه إذا كان:

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$$

راسمين مستمرين، فحينئذ يكون f_0 مكافئاً هموتوبيا لـ f_1.

٤ ــ بين أن كل فضاء جزئي محدّب من R^2 قابل للانكماش (يقال إن A فضاء جزئي محدب من R^2 إذا حقق الشرط: $p, q \in A \Leftarrow (1-t).p+t.q \in A$، $0 \leq t \leq 1$).

الجزء الثاني.

٥ ــ ليكن X فضاء تبولوجيا، و$\sigma_0, \sigma_1 : I \longrightarrow X$ مسارين بحيث أن $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$. بين أن $\sigma_0 \simeq \sigma_1$.

٦ ــ ليكن X فضاء تبولوجيا وσ_0 وσ_1 مسارين في X، و$F : I \times I \longrightarrow X$ راسماً مستمراً بحيث أن $F(s,0) = \sigma_0(s)$، و$F(s,1) = \sigma_1(s)$، $\forall s \in I$. ليكن α و β المسارين في X:

$$\alpha(t) = F(0,t)\ ,\ \beta(t) = F(1,t), \forall t \in I.$$

بين أن $\sigma_1 \sim \alpha^{-1}\ \sigma_0 . \beta$.

٧ ــ ليكن X فضاء تبولوجيا، وx_0 نقطة في X. إذا كان $\mathbf{f_0, f_1} : (\mathbf{I^n}, \partial \mathbf{I^n}) \longrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{x_0})$ راسمين مستمرين، فيقال أن f_0 **مكافىء هموتوبيا** لـ $\mathbf{f_1}$ بالنسبة لـ $\partial \mathbf{I^n}$، إذا كانت هنالك هموتوبيا F من $\mathbf{f_0}$ إلى $\mathbf{f_1}$ بحيث أن:

$$\mathbf{F}(\partial \mathbf{I^n} \times \mathbf{I}) = \{\mathbf{x_0}\}$$

بين أن علاقة الهموتوبيا بالنسبة لـ ∂I^n، علاقة تكافؤ على مجموعة الرواسم المستمرة:

$$\mathbf{f} : (\mathbf{I^n}, \partial \mathbf{I^n}) \longrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{x_0}).$$

الجزء الثالث

٨ – ليكن W فضاء تبولوجيا. $\forall$ فضاء تبولوجي X، لتكن [W,X] مجموعة فصول الهموتوبيا للرواسم المستمرة من W إلى X. بين أنه إذا كان $f: X \longrightarrow Y$ راسماً مستمراً، فحينئذ يؤدي f إلى راسم:

$$f_*: [W,X] \longrightarrow [W,Y]$$

بحيث إذا كان f تكافؤاً هموتوبيا، حينئذ يكون f_* تقابلاً.

٩ – ليكن X فضاء تبولوجيا. لتكن $H^1(X)$ مجموعة فصول الهموتوبيا للرواسم المستمرة من X إلى S^1. بين أن $H^1(X)$ زمرة بالنسبة للعملية الثنائية التالية: $\forall$ [f] و[g] $\in H^1(X)$، فإن $[f] \cdot [g]$ هو فصل الهموتوبيا الذي يمثله الراسم:

$$h: X \longrightarrow S^1$$

$h(x) = f(x)\,g(x), \forall x \in X$.

(تحقق أولاً من أن العملية الثنائية معرفة تعريفاً سليماً).

١٠ – بالإشارة إلى التمرين السابق، بين أنه إذا كان X وY فضاءين متكافئين هموتوبيا، فحينئذ تكون $H^1(X)$ و$H^1(Y)$ متشاكلتين تقابلياً.

١١ – أوجد الزمرة الأساسية لـ (i) المخروط (ii) مكعب هلبرت.

الجزء الرابع.

١٢ – أوجد الزمرة الأساسية لكل من الفضاءات التالية:

(i) $R^2 - \{0\}$

(ii) $S^1 \times \ldots \times S^1$ (n مرة).

(iii) الفضاء الاسقاطي P^1.

١٣ – صنف الفضاءات التي تمثلها الأشكال التالية حسب النوع الهموتوبي:

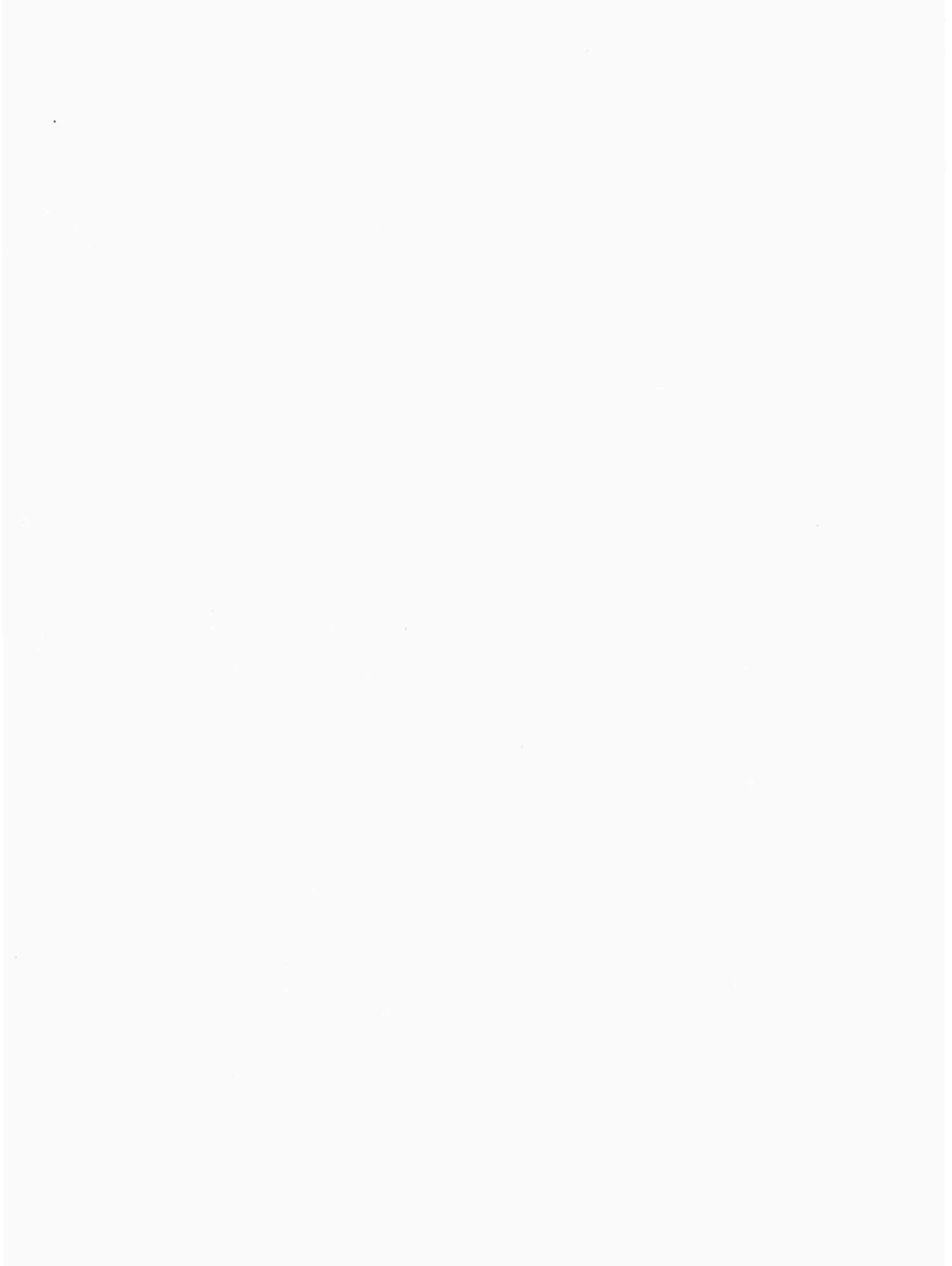
A و B و D و E و F.

١٤ – باستخدام المسألة ١(ب)، برهن أن R^n غير مكافىء تبولوجيا لـ R^2, $n \neq 2$.

الجزء الخامس.

١٥ – ليكن $f: S^2 \longrightarrow S^2$ راسماً مستمراً. بين أن f يكون حينئذ غامراً أو توجد $x \in S^2$ بحيث أن $f(-x) = f(x)$.

١٦ – برهن أنه ليس بالإمكان طمر S^2 في R^2.



تمارين محلولة

تمارين (١)

حل تمرين ٣

نعتبر الدالة: $f(x) = 0$ إذا كانت $0 < x \leq 1$ و $f(0) = 1$. f دالة قابلة للمكاملة على I وإذا كانت θ هي الدالة: $\theta(x) = 0 , \forall x \in I$، فإن

$$d(f, \theta) = \int_0^1 | f - \theta | = 0$$

مع أن $f \neq \theta$. إذن d ليس متركا على X.

حل تمرين ٤

(i) لتكن a و x نقطتين في R^2. عندئذ

$$\begin{aligned} | f(x) - f(a) | &= | x_1 + x_2 - (a_1 + a_2) | \\ &\leq | x_1 - a_1 | + | x_2 - a_2 | \\ &\leq d(x, a) + d(x, a) \end{aligned}$$

حيث d المترك المعتاد على R^2. من ثم، إذا أعطينا $\xi > 0$ فبإمكاننا أن نختار $\delta = \frac{\xi}{2}$ ليتحقق شرط الاستمرار عند a.

(ii) إذا كانت a و $x \in R^2$، فإن

$$\begin{aligned} | f(x) - f(a) | &= | x_1 . x_2 - a_1 . a_2 | \\ &= | x_1 . (x_2 - a_2) + a_2 . (x_1 - a_1) | \\ &\leq | x_1 | . | x_2 - a_2 | + | a_2 | . | x_1 - a_1 | \\ &\leq (| x_1 | + | a_2 |) . d(x, a) \end{aligned}$$

الآن إذا كانت $d(x, a) < 1$، فيترتب على ذلك أن $| x_1 - a_1 | < 1$ ومن ثم فإن $| x_1 | < 1 + | a_1 |$، و

$$| f(x) - f(a) | < (1 + | a_1 | + | a_2 |) . d(x, a)$$

إذن إذا كانت لدينا $\xi > 0$، فباختيار δ = أصغر العددين 1 و $\frac{\xi}{1+|a_1|+|a_2|}$، يتحقق شرط الاستمرار عند a.

(iii) نأخذ A و $H \in M_n(R)$. نثبت بالاستقراء الرياضي على n أن هنالك $K > 0$ بحيث كلما كان $\|H\| = \sqrt{\sum_{i,j} h^2_{ij}} < 1$، فإن

$$|\det (A + H) - \det A| \leq K . \|H\| . \qquad (*)$$

إذا كانت $n = 1$ تتحقق (*) بأخذ $K = 1$. لنفرض أن $n > 1$ وأن (*) صحيحة في $M_{n-1}(R)$. إذا كان A و $H \in M_n(R)$، فإن

$$\det (A + H) = (a_{11} + h_{11}) . C_{11} - (a_{12} + h_{12}) C_{12} + ... + (-)^{n+1} (a_{1n} + h_{1n}) C_{1n}$$

حيث C_{1i} (كالمعتاد) هو محدد المصفوفة الناتجة عن حذف الصف الأول والعمود i في $A + H$. لما افترضنا صحة (*) لـ $n - 1$، فإن هنالك $K_i > 0$ بحيث $C_{1i} = A_{1i} + \eta_i$ و $|\eta_i| \leq K_i . \|H\|$ (A_{1i} يساوي C_{1i} في حالة $H = 0$).
إذن

$$\begin{aligned}\det (A + H) = & (a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + ... + (-)^{n+1} a_{1n} . A_{1n}) \\ & + (a_{11} . \eta_1 - a_{12} . \eta_2 + ... + (-)^{n+1} a_{1n} \eta_n) \\ & + (h_{11} (A_{11} + \eta_1) - ... + (-)^{n+1} h_{1n} (A_{1n} + \eta_{1n}))\end{aligned}$$

نلاحظ أن الحد الأول في الجانب الأيمن من هذه المطابقة هو $\det A$. لما كان $|h_{ij}| \leq \|H\| < 1$، فيتضح من المطابقة أعلاه أن هنالك $K > 0$ بحيث $|\det (A+H) - \det A| \leq K . \|H\|$. من ثم إذا كانت $\xi > 0$ فنختار δ أصغر العددين 1 و $\frac{\xi}{K}$ لتحقيق شرط الاستمرار عند A.

حل تمرين ٩

(أ) لنفرض جدلا أن $f: R^n \longrightarrow R$ تكافؤ متري. إذن كلما كانت $x \in S^{n-1}$ كانت المسافة بين $f(x)$ و $f(0)$ تساوي 1 أي أن:
$f(x) \in \{ f(0) - 1 , f(0) + 1 \}$. لما كانت S^{n-1} مجموعة لا نهائية، $n > 1$، فهذا يتناقض مع افتراضنا أن f تكافؤ متري إذ هو راسم آحادي. إذن لا يوجد تكافؤ متري من R^n إلى R.

(ب) نثبت $x_0 \in S^{n-1}$. إذا كان هنالك تكافؤ متري $f: R^n \longrightarrow R^2$، فإنه يأخذ مجموعة النقاط في S^{n-1} التي تبعد مسافة $\frac{1}{2}$ من x_0 إلى مجموعة النقاط في الدائرة $|z - f(0)| = 1$ بحيث تكون z على مسافة $\frac{1}{2}$ من $f(x_0)$. لما كانت المجموعة الأولى لا نهائية، والثانية منتهية، فهذا يتناقض مع افتراضنا أن f آحادي.

تمارين (٢)

حل تمرين ٣

ت١ . استنادا إلى الفرضية ، فإن $\phi \ni \mathcal{U}$ ، ولما كانت $I^c = \phi$ مجموعة قابلة للعد ، فإن $I \ni \mathcal{U}$.

ت٢ . $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة للاتحاد الكيفي : لأنه إذا كانت K مجموعة ما بحيث $U_k \ni \mathcal{U}$ ، لكل $k \ni K$ ، وإذا كان $\underset{K}{\cup} U_k \neq \phi$ فثمة $k_0 \ni K$ بحيث أن $U_{k_0} \neq \phi$ و $U^c_{k_0}$ قابلة للعد .

الآن $(\underset{K}{\cup} U_k)^c$ محتواة في U_{k_0} ، ولذا فإنها مجموعة قابلة للعد . إذن $\underset{K}{\cup} U_k \ni \mathcal{U}$.

ت٣ . $\mathcal{U}$ مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي : لأنه إذا كانت $U_i \ni \mathcal{U}, 1 \le i \le n$ ، و $\overset{n}{\underset{1}{\cap}} U_i \neq \phi$ ، فإن :

$$\begin{aligned}(\overset{n}{\underset{1}{\cap}} U_i)^c &= I - \overset{n}{\underset{1}{\cap}} U_i \\ &= \overset{n}{\underset{1}{\cup}} (I - U_i)\end{aligned}$$

نظراً إلى أن $U_i \neq \phi , n \ge i \ge 1$ ، فإن U^c_i مجموعة قابلة للعد ، مما يترتب عليه أن $(\overset{n}{\underset{1}{\cap}} U_i)^c$ مجموعة قابلة للعد . إذن $\overset{n}{\underset{1}{\cap}} U_i \ni \mathcal{U}$.

في ضوء ت١ ، ت٢ وت٣ ، فإن $\mathcal{U}$ تبولوجيا على I .

حل تمرين ٨

لما كان f أحاديا ، فإذا افترضنا جدلا أنه ليس تزايديا تماما أو تناقصيا تماما ، كانت هنالك واحدة على الأقل من حالتين :

(١) توجد $a < b < c$ في نطاق f بحيث $f(a) < f(b) > f(c)$. في هذه الحالة ، $f(a) \neq f(c)$. إذا كانت $f(a) < f(c)$ ، فيترتب على نظرية القيمة الوسطى (على الفترة $[a, b]$) أن هنالك $x \ni (a, b)$ بحيث $f(c) = f(x)$. إذ أن $x \neq c$. نكون قد وصلنا إلى تناقض لأن f راسم أحادي . إذا كانت $f(a) > f(c)$ ، فبنفس الطريقة ، نحصل على $x \ni (b, c)$ بحيث $f(a) = f(x)$.

(٢) توجد a , b و c في نطاق f بحيث $f(a) > f(b) < f(c)$. و $a < b < c$. بأسلوب مشابه لما تقدم ، نحصل على تناقض .

إذن f تزايدية تماما أو تناقصية تماما .

من ثم ، إذا كانت J فترة من R ، و $f: [0, 1] \longrightarrow J$ مستمرا وآحاديا ، كانت صورته فترة مغلقة . إذن لا يوجد تكافؤ تبولوجي من $[0, 1]$ إلى $(0, 1)$ أو $[0, 1)$.

كذلك إذا كان $f:[0,1) \longrightarrow (0,1)$ مستمرا وآحاديا، كانت صورته فترة نصف مغلقة - مفتوحة، ولذا لا يكون غامرا.

حل تمرين ١٤

(أ) إذا كانت U مفتوحة في $\mathbf{R}^n$، و $a \in U$، فهنالك $\xi > 0$ بحيث $B(a;\xi)$ محتوى في U. من ثم، فإن المستطيل

$$A_a = \left(a_1 - \frac{\xi}{\sqrt{n}}, a_1 + \frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \times \dots \times \left(a_n - \frac{\xi}{\sqrt{n}}, a_n + \frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)$$

محتوى في U ويحوي a. من الجلي أن $\bigcup_{a \in U} A_a = U$

(ب) لتكن U و a و ξ كما في البند (أ). بما أن Q كثيفة في R، فنستطيع أن نختار $q_i \in Q$ بحيث $a_i - \frac{\xi}{\sqrt{n}} < q_i < a_i + \xi/\sqrt{n}$, $1 \le i \le n$ إذن $(q_1, \dots, q_n)$ تنتمي إلى $U \cap \mathbf{Q}^n$.

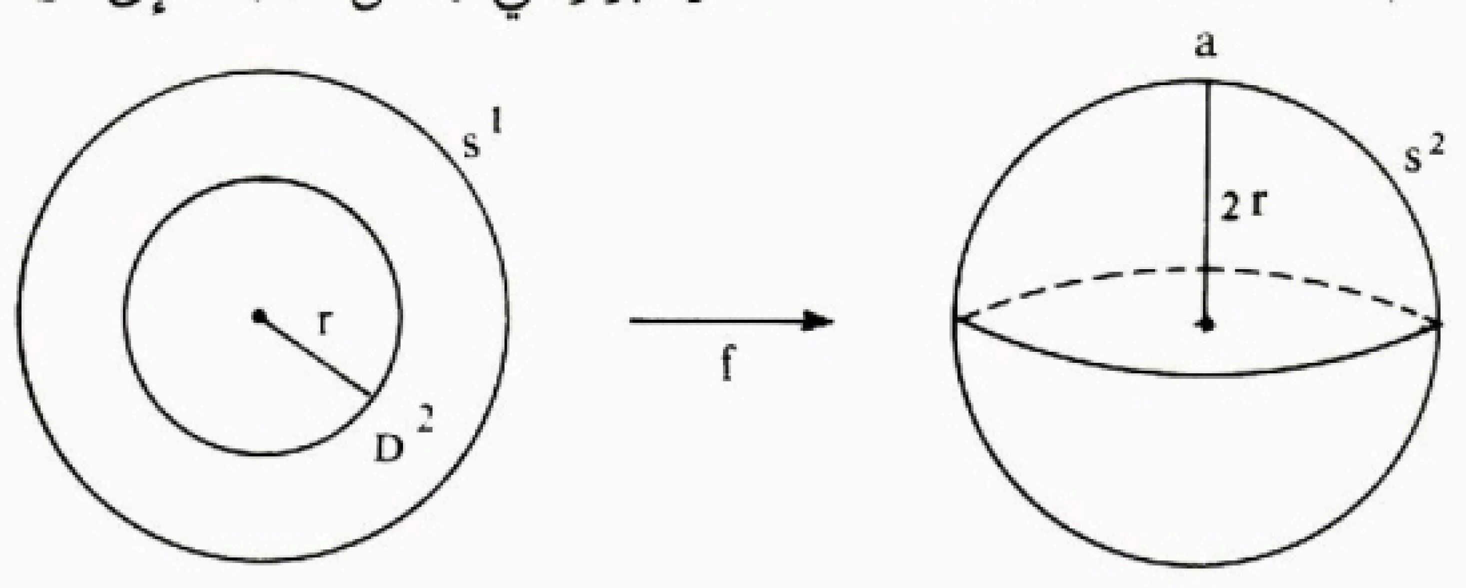
تمارين (٣)

حل تمرين ٥

لنفترض أن $x \in (\prod_J F_j)^c$. إذن توجد $j_0 \in J$ بحيث $x(j_0) \in F_{j_0}^c$. الآن إذا وضعنا $U_{j_0} = F_{j_0}^c$، كانت U_{j_0} مجموعة مفتوحة في X_{j_0}، مما يترتب عليه أن $p_{j_0}^{-1}\ U_{j_0}$ جوار مفتوح لـ x محتوى في $(\prod_J F_j)^c$. وهكذا فإن $(\prod_J F_j)^c$ مجموعة مفتوحة في $\prod_J X_j$. من ثم فإن $\prod_J F_j$ مغلقة في $\prod_J X_j$.

حل تمرين ١٣

لتكن a النقطة (0,0,1) في S^2. ليكن $f: D^2 \longrightarrow S^2$ معرفاً على النحو التالي: f يرسل 0 إلى a و S^1 إلى a-، ويرسل الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ إلى الدائرة في S^2 العمودية على محور z والتي تبعد مسافة 2r من النقطة a ($0 < r < 1$)، بواسطة التكافؤ التبولوجي الطبيعي بين الدائرتين (انظر الشكل أدناه). من الواضح أن f راسم مستمر وغامر، وينشأ عنه تكافؤ تبولوجي .f من D^2/S^1 إلى S^2.



(i) الآن نلاحظ أن $D^2/S^1 \simeq I^2/\partial I^2$. لما كان I^2 صورة مستمرة لـ I فإن S^2 صورة مستمرة لـ I.

(ii) I^2 صورة مستمرة لـ C، ومن ثم، فإن S^2 صورة مستمرة لـ C.

تمارين (٤)

حل تمرين ٤

ليكن X الفضاء المعتاد $\{0\} - R^2$. ليكن:

$$X_1 = \{(x,y) \in X : y \geq 0\}$$
$$X_2 = \{(x,y) \in X : y \leq 0\}$$

نستطيع أن نبين أن X_1 فضاء متصل كما يلي: ليكن A_r تقاطع X_1 مع الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ $(0 < r)$، وليكن B_r اتحاد A_r مع الجزء الموجب من محور y. من الواضح أن B_r فضاء جزئي متصل من X_1، و $\bigcap_{r>0} B_r \neq \phi$. إذن $X_1 = \bigcup_{r>0} B_r$ فضاء متصل. بطريقة مشابهة، فإن X_2 فضاء جزئي متصل. نظراً إلى أن $X_1 \cap X_2$ مكافيء تبولوجيا لـ $R - \{0\}$، فهو غير متصل.

حل تمارين ١٤

(i) لما كان $M_n(R)$ مكافئاً تبولوجيا لـ R^{n^2}، و R^{n^2} جداء فضاءات متصلة بالمسارات، فإن $M_n(R)$ متصل بالمسارات.

(ii) إذا كان f و $g \in (C(I)$ و $d_1)$، فإن

$$\sigma(t) = (1 - t).f + t.g$$

$0 \leq t \leq 1$، يعرف مساراً في $(C(I),d_1)$ من f إلى g.

إذن $(C(I),d_1)$ متصل بالمسارات.

(iii) لما كان $id: (C(I),d_1) \longrightarrow (C(I),d_2)$ مستمراً وغامراً، فاستناداً على البند (ii)، فإن $(C(I),d_2)$ صورة مستمرة لفضاء متصل بالمسارات، ومن ثم فإنه متصل بالمسارات.

(iv) إذا كان a القطب الشمالي في S^n أي أن $a = (0,...,0,1)$ فإن $S^n - \{a\}$ مكافيء تبولوجيا لـ R^n (عبر الإسقاط المجسامي). إذن $S^n - \{a\}$ متصل بالمسارات. بنفس الطريقة، فإن $S^n - \{-a\}$ متصل بالمسارات، مما يترتب عليه أن اتحادهما وهو S^n متصل بالمسارات.

تمارين (٥)

حل تمرين ٤

إذا اعتبرنا A = متممة $\{(1,0)$ و $(0.0)\}$ في الفضاء $X/\sim$ لوجدنا أنه مكافيء تبولوجيا للفترة المغلقة [0,1] ومن ثم فهو فضاء متراص. بنفس الطريقة فإن $B = \{(0,1), (1,1)\}^c$ في $X/\sim$ فضاء جزئي متراص. لما كان $A \cap B$ مكافئاً تبولوجيا للفترة المفتوحة (0,1) فإنه غير متراص.

تمارين (٦)

حل تمرين ٨

إذا كانت a نقطة قياسية في R، فهنالك متوالية (x_n) من الأعداد اللاقياسية تؤول إلى a. لما كان $f(x_n) = O$، لكل $n \ni N$ فإن $(f(x_n))$ تؤول إلى O ومن ثم فهي لا تؤول إلى f(a). إذن f غير مستمر عند a.

الآن نفرض أن a عدداً لا قياسياً بحيث $o < a < 1$. إذا أعطينا $\varepsilon > o$، نختار $n \ni N$ بحيث $\frac{1}{n} < \varepsilon$. نلاحظ الآن أن مجموعة الأعداد القياسية: P/q بحيث $P/q \ni (0,1)$، و $q > n$ هي المجموعة A المشكلة من:

$$1/2 , 1/3 , 2/3 , 1/4 , 2/4 , 3/4 ,\cdots, 1/n\text{-}1 , 2/n\text{-}1 ,\cdots, n\text{-}2/n\text{-}1$$

لما كانت A مجموعة منتهية، فإن متممتها B في (0,1) مجموعة مفتوحة في R وتحوي a. الآن، كلما كانت $x \ni B$، فإما أن $f(x) = 0$، وإما أن $f(x) = \frac{1}{q}$ حيث $q \leq n$. إذن $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ كلما كانت $x \ni B$. من ثم، فإن f مستمر عند a.

بطريقة مشابهة، نستطيع أن نبين أن f مستمرة عند كل نقطة لا قياسية في R.

حل تمرين ١٠

لنفرض أن A مجموعة لا نهائية في $N \times \{a,b\}$. إذن هنالك $n \ni N$ بحيث (a,n) أو (b,n) نقطة فى A. لنفرض دون مساس بالعمومية أن $(a,n) \ni A$. يترتب على تعريف تبولوجيا الجداء أن كل جوار لـ (b,n) يحوي $\{n\} \times \{a,b\}$، ومن ثم فهو يقاطع A في نقطة مغايرة لـ (b,n). إذن (b,n) نقطة نهاية لـ A، و $N \times \{a,b\}$ يتمتع بخاصة ب - و.

نلاحظ الآن أن المجموعات: $\{n\} \times \{a,b\}$, $n \ni N$ تشكل غطاء مفتوحاً لـ $N \times \{a,b\}$ بحيث لا يحوي غطاء جزئياً منتهياً. من ثم فإن $N \times \{a,b\}$ غير متراص.

تمارين (٧)

حل تمرين ٥

إذا أخذنا أي مجموعة جزئية لا نهائية قابلة للعد من R، نجد أنها كثيفة في فضاء المتممة المنتهية R، لأنها تقاطع كل مجموعة مفتوحة U غير خالية (متممة U مجموعة منتهية). إذن R قابل للفصل.

لنفرض أن B_1, B_2، ... تشكل قاعدة مفتوحة لفضاء المتممة المنتهية R. إذن $\{x\}^c$ مجموعة مفتوحة لكل $x \in R$، ومن ثم فإن $\{x\}^c$ اتحاد لبعض المجموعات: B_n. يترتب على ذلك أن هنالك $m \in N$ بحيث $x \notin B_m$، ولذا فإن $x \notin \bigcap_1^\infty B_n$ إذن $\bigcap_1^\infty B_n = \phi$، مما ينتج عنه أن:

$$R = R - \bigcap_1^\infty B_n$$
$$= \bigcup_1^\infty (R - B_n)$$

مجموعة قابلة للعد لأن $R - B_n$ مجموعة منتهية لكل n. إزاء هذا التناقض، نستنتج أن R ليس فضاء C_2.

حل تمرين ٨

لنفرض أن A و B مغلقتان في (R,U) ولا تتقاطعان. لما كانت B^c مجموعة مفتوحة، فلكل $a \in A$، نستطيع أن نختار r_a بحيث $[a,r_a)$ لا يقاطع B. بحجة مماثلة، فلكل $b \in B$ نستطيع أن نختار r_b بحيث $[b,r_b)$ لا يقاطع A. نعرف: $U = \bigcup_A [a,r_a)$ و $V = \bigcup_B [b,r_b)$. من الواضح أن U و V جواران لـ A و B على الترتيب ولا يتقاطعان.

تمارين (٨)

حل تمرين ٢

لنفرض جدلاً أن X فضاء منتظم. لما كان X قابلاً للعد، فهو فضاء ليندلوف، وإذن فإن X فضاء سوى. استناداً على تمهيد يوريسون، فإن X نطاق لدالة مستمرة غير ثابتة مما يتناقض مع استنتاج ٨-٤. من ثم فإن X غير منتظم.

حل تمرين ٥

يترتب على نظرية التمديد لتيتز والملاحظات التي أعقبتها، أن لـ $f: A \longrightarrow R^{n+1}$ ممدد مستمر:

$$F: X \longrightarrow R^{n+1}.$$

ليكن U الجوار المفتوح لـ A: $U = F^{-1}(R^{n+1} - \{0\})$

نعرف $g: U \longrightarrow S^n$ بـ :

$$g(x) = F(x)/|F(x)|$$

من الواضح أن g يمدد $f: A \longrightarrow S^n$.

حل تمرين ٧

إذا كان X متراصاً و T_2، فهو سوى. إذا كان فضلاً عن ذلك فضاء C_2، فاستناداً إلى نظرية التعبير المتري ليوريسون فإن X قابل للتعبير المتري.

لنفرض الآن أن X متراص و T_2 وقابل للتعبير المتري. من ثم فهو فضاء متري محدود كلياً. لكل $n \in N$، نختار عدداً منتهياً من الأقراص المفتوحة بحيث نصف قطر كل منها يساوي $\frac{1}{n}$ وتغطي X. لتكن A_n مجموعة مراكزها. إذن $\bigcup_1^\infty A_n$ مجموعة قابلة للعد. الآن إذا كان $B(x;r)$ قرصاً مفتوحاً في X، فهنالك $m \in N$ بحيث $\frac{1}{m} < \frac{r}{4}$ و $a_m \in A_m$ و $B(x;\frac{r}{4})$ يقاطع $B(a_m;\frac{1}{m})$. إذن $a_m \in B(x;r)$ ومن ثم فإن $\bigcup_1^\infty A_n$ مجموعة كثيفة في X. وهكذا فإن X فضاء متري قابل للفصل ولذا فهو فضاء C_2.

تمارين (٩)

حل تمرين ١

(أ) لتكن X الاسطوانة: $\{(x,y,z): x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ ولتكن A قاعدتها. الآن $f:X \longrightarrow A$ الذي يرسل (x,y,z) إلى (x,y,o) تكافؤ هموتوبي، معكوسة الهموتوبي هو راسم التضمين j من A إلى X، لأن $f_t:X \longrightarrow X$ حيث:

$$0 \leq t \leq 1\ ,\ f_t(x,y,z) = (x,y,(1-t).z)$$

هموتوبيا من id_X إلى jof، و $foj = id_A$.

(ب) $f:X \longrightarrow S^{n-1}$ حيث $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ تكافؤ هموتوبي معكوسة الهموتوبي هو راسم التضمين j من S^{n-1} إلى X. نعرف هموتوبيا من id_X إلى jof بـ :

$$F(x,t) = (1-t).x + t.\frac{x}{\|x\|}$$

(جـ) لتكن a أبعد نقطة في المخروط من قاعدة المخروط. عندئذ $F(x,t) = (1-t).x + t.a$ يعرف هموتوبيا من id_X إلى الراسم الثابت a.

إذن X قابل للانكماش ومن ثم، فإنه مكافيء هموتوبيا لـ $\{0\}$.

حل تمرين ١٤

إذا فرضنا جدلاً أن $R^2 \simeq R^n$ $(n > 2)$ فيترتب على ذلك أن $R^2 - \{0\} \simeq R^n - \{0\}$. استناداً على تمرين ١ (ب)، فإن S^{n-1} مكافيء هموتوبيا لـ S^1 $(n > 1)$. بيد أن S^{n-1} متصل ببساطة و S^1 غير متصل ببساطة. إزاء هذا التناقض نستنتج أن R^n غير مكافيء تبولوجياً لـ R^2 $(n > 2)$.

الآن $R - \{0\}$ غير متصل بينما $R^2 - \{0\}$ متصل. من ثم فإن R غير مكافيء لـ R^2.

المـــراجع

1- **Appel K.**, and **Haken, W.**, Every Planar map is Four Colourable, Part I: Discharging, *Illinois J.M.* **21**, 429-490 (1977).

2- **Appel, K.**, and **Haken, W.**, Every Planar map is Four Colourable, Part II: Reducibility, *Illinois J.M.* **21** 491-567 (1977).

3- **Christenson, C.O.** and **Voxman, W.L.**, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, N.Y. (1977).

4- **Courant, R.** and **Robbins, H.**, *What is Mathematics*, Oxford, London & N.Y. (1941).

5- **Dugundji, J.**, *Topology*, Allyn and Bacon, (1966).

6- **Greenberg, M.J.** *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, Reading, Mass., (1967).

7- **Hocking, J.G.** and **Young, G.S.** *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1961).

8- **Hu, S.T.**, *Homotopy Theory*, Academic Press, N.Y. (1959).

9- **Jameson, G.J.O.**, *Topology and Normed Spaces*, Champman and Hall, London, (1974).

10- **Kelley, J.L.**, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton. (1955).

11- **Massey, W.S.**, *Algebraic Topology: An Introduction, Harcourt, Brace, and World, N.Y., (1967).*

12- **Munkres, J.R.**, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, N.Y., (1975).

13- **Simmons, G.F.**, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw Hill, N.Y., (1963).

14- **Singer, I.M.** and **Thorpe, J.A.**, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry Springer-Verlag, N.Y., (1967).*

15- **Spanier, E.H.**, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, N.Y., (1966).

16- **Wall, C.T.C.**, *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1972).

17- **خضر الأحمد**، مبادىء التبولوجيا العامة، جامعة دمشق (١٩٧٦ م)

